ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના ઠરાવ-ક્રમાંક
જશભ/1221/સિં.ફા./9/ન., તા. 23-12-2021–થી મંજૂર

વૈદિક ગણિત

ધોરણ 9

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

રાજ્ય સરકારની વિનામૂલ્યે યોજના હેઠળનું પુસ્તક

ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બૉર્ડ,
ગાંધીનગર

તમસો મા જ્યોતિર્ગમય

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

વિષય-કન્વીનર

શ્રી રૂપેશભાઈ ભાટિયા

લેખન

ડૉ. નરેન્દ્ર પંચોલી

શ્રી પરિધિ ત્રિવેદી પરીખ

શ્રી ધનરાજભાઈ ઠક્કર

શ્રી હૃષીકેષભાઈ ઠક્કર

ડૉ. અમિષા દવે

શ્રી મયુર હરિયાણી

સમીક્ષા

શ્રી નવીનચંદ્ર એલ. પટેલ

શ્રી પ્રવિણકુમાર આઈ. પટેલ

શ્રી વિજયસિંહ ખેર

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રીમતી સ્નેહલબેન એન. પટેલ

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી મનીષ એચ. બધેકા

(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

વિતરણ-આયોજન

શ્રી હર્ષદ એચ. ચૌધરી

(નાયબ નિયામક : વહીવટ-વિતરણ)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય શિક્ષણનીતિ, 2020 અંતર્ગત ભારતીય જ્ઞાન-પ્રણાલી (Indian Knowledge System) અન્વયે વિદ્યાર્થીઓ ભારતની ભવ્ય સંસ્કૃતિ અને તેના વારસાથી પરિચિત થાય અને ભારતીય હોવા પર ગર્વ અનુભવે તે હેતુથી ગુજરાત સરકાર દ્વારા શાળા કક્ષાએ વૈદિક ગણિત અભ્યાસનો અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો છે. જે વિદ્યાર્થીઓને સર્વાંગી વિકાસમાં મદદરૂપ થઈ શકશે.

ધોરણ 9ના વૈદિક ગણિતના પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે માનનીય સચિવશ્રી (પ્રાથમિક શિક્ષણ અને માધ્યમિક શિક્ષણ) દ્વારા માર્ગદર્શન આપવામાં આવ્યું છે. વૈદિક ગણિતના નિષ્ણાત, તજ્જ્ઞ, પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકોના યોગદાનથી કાર્યશાળાના સફળ આયોજન થકી આ પાઠ્યપુસ્તકનું લેખનકાર્ય ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ, ગાંધીનગરના નિદર્શનમાં થયેલ છે. સમીક્ષકોના માર્ગદર્શક સૂચનો અનુસાર યોગ્ય સુધારા વધારા કર્યા પછી પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું છે.

ધોરણ 9ના વૈદિક ગણિતના આ પાઠ્યપુસ્તકમાં પ્રવર્તમાન પાઠ્યપુસ્તક ગણિત ધોરણ 9ના અમુક ચોક્કસ વિષયાંગોનો સમાવેશ કરવાનો પ્રયત્ન થયેલ છે. જે વિદ્યાર્થીઓ માટે વિષયાંગોનું સરલીકરણ કરવામાં મહત્ત્વનું બની રહેશે.

ગણિત વિષયના શિક્ષકો, તજ્જ્ઞો તેમજ શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકની ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આ પાઠ્યપુસ્તકનું મુદ્રણકાર્ય કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં આનંદ અનુભવે છે.

બંછાનિધિ પાની (IAS)	વિનયગિરિ ગોસાઈ	મુકેશ કુમાર (IAS)
અધ્યક્ષ ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બૉર્ડ, ગાંધીનગર	નિયામક ગુ.રા.શા.પા.પુ.મં. ગાંધીનગર	કાર્યવાહક પ્રમુખ ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2022, 2023, 2024

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી વિનયગિરિ ગોસાઈ, નિયામક

મુદ્રક :

મૂળભૂત ફરજો

ભારતના દરેક નાગરિકની ફરજો નીચે મુજબ રહેશે :*

(ક) સંવિધાનને વફાદાર રહેવાની અને તેના આદર્શો તથા સંસ્થાઓનો, રાષ્ટ્રધ્વજનો અને રાષ્ટ્રગીતનો આદર કરવાની;

(ખ) આઝાદી માટેની આપણી રાષ્ટ્રીય લડતને પ્રેરણા આપનારા ઉમદા આદર્શોને હૃદયમાં પ્રતિષ્ઠિત કરવાની અને અનુસરવાની;

(ગ) ભારતના સાર્વભૌમત્વ, એકતા અને અખંડિતતાનું સમર્થન કરવાની અને તેમનું રક્ષણ કરવાની;

(ઘ) દેશનું રક્ષણ કરવાની અને રાષ્ટ્રીય સેવા બજાવવાની હાકલ થતાં, તેમ કરવાની;

(ચ) ધાર્મિક, ભાષાકીય, પ્રાદેશિક અથવા સાંપ્રદાયિક ભેદોથી પર રહીને, ભારતના તમામ લોકોમાં સુમેળ અને સમાન બંધુત્વની ભાવનાની વૃદ્ધિ કરવાની, સ્ત્રીઓનાં ગૌરવને અપમાનિત કરે તેવા વ્યવહારો ત્યજી દેવાની;

(છ) આપણી સમન્વિત સંસ્કૃતિના સમૃદ્ધ વારસાનું મૂલ્ય સમજી તે જાળવી રાખવાની;

(જ) જંગલો, તળાવો, નદીઓ અને વન્ય પશુપક્ષીઓ સહિત કુદરતી પર્યાવરણનું જતન કરવાની અને તેની સુધારણા કરવાની તથા જીવો પ્રત્યે અનુકંપા રાખવાની;

(ઝ) વૈજ્ઞાનિક માનસ, માનવતાવાદ અને જિજ્ઞાસા તથા સુધારણાની ભાવના કેળવવાની;

(ટ) જાહેર મિલકતનું રક્ષણ કરવાની અને હિંસાનો ત્યાગ કરવાની;

(ઠ) રાષ્ટ્ર પુરુષાર્થ અને સિદ્ધિનાં વધુ ને વધુ ઉન્નત સોપાનો ભણી સતત પ્રગતિ કરતું રહે એ માટે, વૈયક્તિક અને સામૂહિક પ્રવૃત્તિનાં તમામ ક્ષેત્રે શ્રેષ્ઠતા હાંસલ કરવાનો પ્રયત્ન કરવાની.

(ડ) માતા-પિતાએ અથવા વાલીએ 6 વર્ષથી 14 વર્ષ સુધીની વયના પોતાના બાળક અથવા પાલ્યને શિક્ષણની તકો પૂરી પાડવાની.

*ભારતનું સંવિધાન : કલમ 51-क

F6F1I6

અનુક્રમણિકા

વૈદિક ગણિત-પરિચય

વેદો સમગ્ર જ્ઞાનનો સ્રોત છે. વેદોમાં રહેલું જ્ઞાન અપૌરૂષેય છે, તે કોઈ માનવે લખેલું નથી. તપસ્વી, યોગી, ઋષિ-મુનિઓને તપ-સાધના દ્વારા આ જ્ઞાન પ્રાપ્ત થયું છે. ધ્યાનની ઉચ્ચ કક્ષાની સિદ્ધ અવસ્થામાં તેઓને જ્ઞાનના સાક્ષાત્કારની અનુભૂતિ થઈ છે અને મંત્રો કે સૂત્રોના સ્વરૂપમાં જ્ઞાનનું પ્રગટીકરણ થયું છે. સામાન્ય મનુષ્ય સમજી શકે તે માટે મંત્રો કે સૂત્રો પરથી અનેક શાસ્ત્રો અને ગ્રંથોની રચના થઈ છે. પ્રાચીન ભારતીય જ્ઞાનપરંપરાની આ વૈદિક શૈલી છે. વૈદિક ગણિતની રચના પણ આ પ્રણાલી મુજબ થઈ છે.

ગોવર્ધનમઠ, પુરીના જગદ્‌ગુરુ સ્વામીશ્રી ભારતીકૃષ્ણતીર્થજી મહારાજે વેદોના મંત્રો, સૂત્રો અને શબ્દોના આધારે સોળ સૂત્રો અને તેર ઉપસૂત્રોનો આવિષ્કાર કર્યો છે. આ સૂત્રો સંસ્કૃત ભાષામાં સંક્ષિપ્ત અને શાબ્દિક સ્વરૂપે છે. આ સૂત્રોના અર્થઘટનને આધારે પ્રયોગો કરીને તેમણે વિવિધ ગાણિતિક વિધિઓનો વિકાસ કર્યો અને 'વૈદિક ગણિત' ગ્રંથની રચના કરી છે.

વૈદિક ગણિતનાં સૂત્રોની ઉપયોગિતાનો વ્યાપ વિશાળ છે. એક સૂત્ર એક કરતાં વધુ ગણનક્રિયામાં ઉપયોગી બને છે અને એક જ ગણન ક્રિયામાં એક કરતાં વધુ સૂત્રોનો ઉપયોગ પણ થાય છે.

આપણે રોજબરોજના જીવનમાં અન્ય વ્યક્તિઓની વય, કક્ષા, વર્ગ, પદ વગેરે બાબતો જોઈને તેમની સાથે વાણી, વર્તન અને વ્યવહાર કરીએ છીએ, તેવી રીતે વૈદિક ગણિતમાં પ્રશ્ન કે દાખલાની રકમનાં લક્ષણો કે સ્વરૂપને ઓળખીને તેના ઉકેલ માટે યોગ્ય સૂત્રની પસંદગી કરીને ગણનક્રિયા કરવામાં આવે છે. વૈદિક ગણિતની આ મુખ્ય વિશેષતા છે.

વૈદિક ગણિતના અભ્યાસથી જીવનમાં વિવિધ પરિસ્થિતિનો તાગ મેળવીને સમસ્યાનું નિરાકરણ કરવાનો જીવનલક્ષી સદ્‌ગુણ ખીલે છે. વૈદિક ગણિત વેદો સાથે જોડાયેલું છે. તેના અભ્યાસથી આપણને આપણી પ્રાચીન મહાન સંસ્કૃતિ અને જ્ઞાનની ધરોહરનું મહત્ત્વ સમજાય છે, સાથે-સાથે ગૌરવ અને આનંદની લાગણી પણ થાય છે તેમજ અન્ય શાસ્ત્રો જાણવાની જિજ્ઞાસા વધે છે.

વૈદિક ગણિતની ગણન પદ્ધતિઓ સંક્ષિપ્ત, ઝડપી, રસપ્રદ, સહજ, સરળ, આનંદદાયક અને આશ્ચર્યજનક છે, તેથી વિદ્યાર્થીઓની ગણિત પ્રત્યે જિજ્ઞાસા જાગે છે, રુચિ કેળવાય છે, તેના આત્મવિશ્વાસમાં વધારો થાય છે તેમજ ગણિત પ્રત્યેનો ડર દૂર થાય છે. આ ઉપરાંત વિદ્યાર્થીની તર્કશક્તિ, સ્મૃતિશક્તિ, બુદ્ધિ, વિશ્લેષણ શક્તિ વગેરેનો વિકાસ થાય છે.

વૈદિક ગણિત એ ગણિતનો જ એક ભાગ છે, તે સ્વતંત્ર જુદો વિષય નથી. શાળા-કૉલેજમાં ભણાવાતા ગણિતની શાખાઓ અને વિષયાંગો વૈદિક ગણિતમાં પણ છે, પરંતુ તે પ્રચલિત ગણિત કરતાં નવીન અને ભિન્ન સ્વરૂપે પ્રસ્તુત થાય છે. વૈદિક ગણિતના અધ્યયન-અધ્યાપનથી ગણિતના તેજસ્વી વિદ્યાર્થીઓ, શિક્ષકો, ગણિતજ્ઞો માટે સંશોધનનાં નવાં દ્વાર ખૂલી શકે તેમ છે.

આર્યભટ્ટ, ભાસ્કરાચાર્ય, શ્રીધરાચાર્ય, વરાહમિહિર જેવા પ્રાચીન વિદ્વાન ગણિતાચાર્યોએ ગણિતના અનેક ગ્રંથો રચ્યા છે, તેમાં ગણિતના વિવિધ વિભાગો ઉપરાંત જ્યોતિષ ગણિતનો સમાવેશ થયેલ છે. આ ગ્રંથો સંસ્કૃતમાં શ્લોકો દ્વારા લખાયેલા છે અને તેની ગણનશૈલી અલગ છે, માટે તે ગણિત પણ વૈદિક ગણિતથી જુદું પડે છે.

સ્વામી શ્રી દયાનંદ સરસ્વતીજીએ સૂત્ર આપ્યું હતું કે, 'વેદો તરફ પાછા ફરો' જેથી ભારતીય જીવન પદ્ધતિનું પુનઃસ્થાપન થશે. આપણે ગણિત-શિક્ષણના વૈદિક ગણિતનો અભ્યાસ કરીને તેઓના સૂત્રને ચરિતાર્થ કરીએ.

1

દશાંશ અભિવ્યક્તિ

I5K8P5

આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય તેવી એટલે કે સંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવતાં શીખી ગયાં છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યામાં છેદમાં રહેલ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવમાં 2 અને 5 હોય, તો તેની અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય છે. પરંતુ 2 અને 5 સિવાય અન્ય એટલે કે 3, 7, 11, 13,... એ પ્રકારે કોઈ અવિભાજ્ય હોય, તો તેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અને આવૃત્ત હોય છે.

સાદી ભાગાકારની રીત વડે આવી અનંત આવૃત્ત પ્રકારની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવવાની પ્રક્રિયા લાંબી અને ક્યારેક કંટાળાજનક બની રહે છે. જ્યારે વૈદિક ગણિતમાં આવી દશાંશ અભિવ્યક્તિ શોધવા માટે ઝડપી અને સરળ રીતો ઉપલબ્ધ છે.

વૈદિક ગણિતની રીતથી આપણે કોઈપણ અપૂર્ણાંકની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સરળતાથી મેળવી શકીએ. પરંતુ અહીં આપણે જે અપૂર્ણાંકોમાં છેદની સંખ્યાનો એકમનો અંક 9 (નવ) હોય તેવા અપૂર્ણાંકોની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવતાં શીખીશું.

આ પ્રક્રિયામાં નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

સૂત્ર : एकाधिकेन पूर्वेण

અર્થ : પહેલાં કરતાં એક વધારે દ્વારા

દશાંશ અભિવ્યક્તિની પ્રક્રિયા માટે સૌ પ્રથમ 'પ્રચાલક' મેળવવો પડે. પ્રચાલક એટલે જેના વડે પ્રક્રિયા ચલાવવાની છે તે અંક. છેદની સંખ્યામાં એકમનો અંક '9' હોય તેવી સંખ્યાઓ માટે તે સંખ્યાના દશકના અંકનો 'એકાધિક' એટલે કે દશકના અંકથી એક વધુ હોય તેવો અંક પ્રચાલક થશે.

જેમ કે, $\frac{1}{19}$ માટે 19ના દશકના અંક '1'નો એકાધિક '2' પ્રચાલક થાય.

$\frac{2}{39}$ માટે પ્રચાલક '4' થશે અને $\frac{1}{59}$ માટે '6'.

ઉદાહરણ 1 : $\frac{1}{19}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

અહીં, છેદમાં રહેલ સંખ્યા 19માં એકમનો અંક 9 છે. સૂત્ર 'एकाधिकेन पूर्वेण' અનુસાર દશકના અંક '1'નો એકાધિક '2' એ પ્રચાલક થશે. પ્રચાલક એટલે જેના વડે પ્રક્રિયા ચલાવવાની છે તે.

અહીં આપણે પ્રચાલકથી ગુણાકાર તેમજ ભાગાકાર એમ બે રીતે આ દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવી શકીશું.

રીત 1 : પ્રચાલકથી ભાગાકાર વડે.

$\frac{1}{19} = 0.{}_{1}0$

પગલું 1 : અંશની સંખ્યા '1' ભાજ્ય અને પ્રચાલક '2' ભાજક થશે. $\frac{1}{19}$માં અંશ કરતાં છેદ મોટો હોવાથી દશાંશ ચિહ્ન મૂક્યા પછી જ પ્રક્રિયા શરૂ થશે.

1 ÷ 2, ભાજક મોટો હોવાથી ભાગફળ : 0 અને શેષ : 1 મળશે.

શેષ : 1, ભાગફળ : 0 આગળ નીચે લખવું.

$\frac{1}{19} = 0._{1}0_{0}5$

પગલું 2 : શેષ અને ભાગફળને સાથે લખતાં મળતી સંખ્યા '10' નવો ભાજ્ય થશે $10 \div 2$, ભાગફળ : 5, શેષ : 0. ભાગફળ અને શેષને અગાઉની જેમ જ મૂકતાં.

$\frac{1}{19} = 0._{1}0_{0}5_{1}2$

પગલું 3 : નવો ભાજ્ય : 5,
$5 \div 2$, ભાગફળ : 2, શેષ : 1

$\frac{1}{19} = 0._{1}0_{0}5_{1}2_{0}6$

પગલું 4 : નવો ભાજ્ય : 12,
$12 \div 2$, ભાગફળ : 6, શેષ : 0

$\frac{1}{19} = 0._{1}0_{0}5_{1}2_{0}6_{0}3$

પગલું 5 : નવો ભાજ્ય : 6,
$6 \div 2$, ભાગફળ : 3, શેષ : 0

$\frac{1}{19} = 0._{1}0_{0}5_{1}2_{0}6_{0}3_{1}1$

પગલું 6 : નવો ભાજ્ય : 3,
$3 \div 2$, ભાગફળ : 1, શેષ : 1

આ પ્રમાણે પ્રક્રિયા ચલાવતાં,

$$\frac{1}{19} = 0._{1}0_{0}5_{1}2_{0}6_{0}3_{1}1_{1}5_{1}7_{1}8_{0}9_{1}4_{0}7_{1}3_{1}6_{0}8_{0}4_{0}2_{0}1_{1}0$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે 18મા સ્થાન પછી અંકોનું આવર્તન શરૂ થઈ જાય છે.

આમ,

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

રીત 2 : પ્રચાલકથી ગુણાકાર વડે.

$\frac{1}{19} = 8421$

પગલું 1 : આ રીતમાં અંશમાં જે સંખ્યા હોય તેને જમણી બાજુ છેલ્લે મૂકી પ્રચાલક વડે ગુણતાં જવું. આમ, 1 લખી ત્યારબાદ $1 \times 2 = 2$,
$2 \times 2 = 4$;
$4 \times 2 = 8$

$\frac{1}{19} = {}_{1}3_{1}6\ 8\ 421$

પગલું 2 : $8 \times 2 = 16$ મળે. અહીં દશાંશ સ્થાન પર '6' લખી '1' વદી તરીકે '6'ની નીચે નાના અક્ષરે લખીશું.
ત્યારબાદ $6 \times 2 + 1 = 13$ (વદી) મળશે.
તેથી, '3'ને દશાંશ સ્થાન પર મૂકી '1' વદી તરીકે લખીશું.

$\frac{1}{19} = 0.0_{1}05_{1}2\ 6\ 3_{1}1_{1}5_{1}7_{1}8\ 9_{1}4\ 7_{1}3_{1}6\ 8421$

પગલું 3 : આ પ્રમાણે પ્રક્રિયા આગળ વધારતાં.

આ પ્રમાણે કરવાથી પણ 18મા સ્થાન પછી અંકોનું પુનરાવર્તન શરૂ થાય છે. આમ, આ રીત પ્રમાણે પણ સમાન જવાબ મળશે.

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

કેટલીક ઉલ્લેખનીય બાબતો :

(1) આવર્તનીય સમૂહ દર્શાવવા તેના પ્રથમ અને છેલ્લા અંક પર '·'ની નિશાની મૂકવી.

(2) આપેલ અપૂર્ણાંકના છેદમાં જો અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો તેની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં કેટલા અંકોનું આવર્તન હશે તેનું અનુમાન કરી શકાય. છેદમાંની સંખ્યાના એક ન્યૂન (એક ઓછું) જેટલા અંકો અથવા તો તેના અવયવો જેટલા અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{19}$માં છેદની સંખ્યા 19નો એક ન્યૂન 18 થશે. આમ, $\frac{1}{19}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં 18 અંકોનું અથવા 18ના અવયવો 1, 2, 3, 6 અથવા 9 અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે. આપણે જોયું કે ઉદાહરણ 1માં 18 અંકોનું આવર્તન મળે છે.

(3) જ્યારે છેદમાં અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય ત્યારે પ્રચાલકથી ભાગાકાર અથવા ગુણાકાર વડે પ્રક્રિયા કરતાં અનુક્રમે ભાજ્ય અથવા ગુણિત જો અંશ-છેદના તફાવત જેટલો મળે તો આપણે અડધા દશાંશ અંકો શોધી લીધાનો સંકેત મળે છે અને બાકીના અંકો પ્રાપ્ત થયેલ અંકોને 9માંથી ક્રમશઃ બાદ કરીને મેળવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 1 વડે જ આ વાત સ્પષ્ટ કરીએ. $\frac{1}{19}$માં અંશ અને છેદનો તફાવત 18 છે. રીત 1માં પ્રાપ્ત થયેલ ભાજ્ય 17ને પ્રચાલક 2 વડે ભાગ ચલાવી ભાગફળ '8' આગળ પ્રાપ્ત શેષ '1'ને મૂકતાં નવો ભાજ્ય 18 મળે. હવે પછીથી પ્રથમ અંક '0'થી ક્રમશઃ બધા અંકોને 9માંથી બાદ કરતાં બાકીના અંકો પ્રાપ્ત થાય છે.

જેમ કે, 0ને 9માંથી બાદ કરતાં દસમા સ્થાન માટે 9 મળે. બીજા અંક 5ને 9માંથી બાદ કરતાં અગિયારમા સ્થાન માટે 4 મળે. ત્રીજા અંક 2ને 9માંથી બાદ કરતાં બારમા સ્થાને 7 અને ચોથા અંક 6ને બાદ કરતાં તેરમા સ્થાને 3 મળે.

આમ, ક્રમશઃ બધા અંકો મેળવી શકાય.

$$\frac{1}{19} = 0.{}_{1}0_{0}5_{1}2_{0}6_{0}3_{1}1_{1}5_{1}7_{1}8\overset{\downarrow}{}947368421$$

આવું જ રીત 2માં પ્રચાલક '2' વડે ગુણાકાર કરતાં પણ થશે. જમણી બાજુથી નવમા અંક '9'ને 2 વડે ગુણતાં ગુણિત 18 મળે, જે અંશ અને છેદના તફાવત જેટલો છે. હવે પછીના અંકો મેળવવા માટે જમણી બાજુથી અંકોને ક્રમશઃ 9માંથી બાદ કરવા જમણી બાજુથી પ્રથમ અંક 1ને 9માંથી બાદ કરતાં જમણી બાજુથી દસમા સ્થાને 8 મળે.

$$\frac{1}{19} = 0.05263157_{1}8\overset{\downarrow}{}9_{1}4\ \ 73_{1}6\ \ 8421$$

આમ, લાંબી ગણતરી કર્યા વગર બાકીના અંકો સહેલાઈથી મેળવી શકાય.

(4) પ્રચાલકથી ગુણાકારની રીતથી આપણે દશાંશ અભિવ્યક્તના બધા અંકો પ્રાપ્ત કરવા પડશે, જ્યારે ભાગાકારની રીતથી આપણે દશાંશ ચિહ્ન પછી જેટલા અંકો પ્રાપ્ત કરવા હોય તેટલા અંકો પ્રાપ્ત કરી પ્રક્રિયા અટકાવી શકીએ.

(5) આ અધ્યાયમાં હવે પછીથી આપણે ભાગાકારની રીતનો ઉપયોગ કરીશું.

(6) જ્યારે અંશ એ છેદ કરતાં મોટો હોય ત્યારે અપૂર્ણાંકને મિશ્ર સંખ્યામાં ફેરવી માત્ર અપૂર્ણાંક ભાગની દશાંશ અભિવ્યક્તિ શોધી, તેને પૂર્ણાંક ભાગ પછી દશાંશ ચિહ્નથી જોડી દેવી.

જેમ કે, $\frac{39}{19}$; $\frac{39}{19} = 2\frac{1}{19} = 2 + \frac{1}{19}$

$$\frac{39}{19} = 2 + 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

$$= 2.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

ઉદાહરણ 2 : $\frac{1}{9}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

રીત 1 : પ્રચાલક વડે ભાગાકારથી અહીં છેદ '9'ને બે અંકોમાં '09' વડે દર્શાવતાં પ્રચાલક દશકના અંક '0'નો એકાધિક '1' થશે.

$\frac{1}{9} = 0._{0}1$ — **પગલું 1 :** દશાંશ ચિહ્ન પછી અંક '1'ને પ્રચાલક 1 વડે ભાગવાથી ભાગફળ : 1 અને શેષ : 0 મળે.

$\frac{1}{9} = 0._{0}1_{0}1_{0}1...$ — **પગલું 2 :** નવો ભાજ્ય ફરી 1 પ્રાપ્ત થશે. આમ, પ્રક્રિયા ચલાવતાં ભાગફળમાં '1'નું આવર્તન થયા કરશે.

રીત 2 : પ્રચાલક વડે ગુણાકારથી

$\frac{1}{9} = ...111$ — **પગલું 1 :** અંશના અંક '1'ને પ્રચાલક 1 વડે ગુણવાથી દરેક વખતે 1 જ પ્રાપ્ત થશે.

આમ, $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$

ઉદાહરણ 3 : $\frac{5}{19}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

અહીં પ્રચાલક 2 થશે.

$$\frac{5}{19} = 0._{1}2_{0}6_{0}3_{1}1_{1}5_{1}7_{1}8_{0}9_{1}4\downarrow 736842105$$

પગલું 1 : અંશ 5ને પ્રચાલક 2 વડે ભાગતાં 5 ÷ 2,
ભાગફળ : 2, શેષ : 1

પગલું 2 : નવો ભાજ્ય 12, 12 ÷ 2,
ભાગફળ : 6, શેષ : 0

પગલું 3 : નવો ભાજ્ય 6, 6 ÷ 2,
ભાગફળ : 3, શેષ : 0

આ પ્રમાણે નવમા સ્થાને નવો ભાજ્ય 14 મળે છે. જે અહીં અંશ અને છેદના તફાવત જેટલો છે. આમ, આપણને અડધું કાર્ય પૂરું થયાનો સંકેત મળે છે. પ્રાપ્ત અંકોને ક્રમશઃ '9'માંથી બાદ કરીને બાકીના અંકો મેળવી શકાય છે.

$$\frac{5}{19} = 0.\dot{2}6315789473684210\dot{5}$$

ઉદાહરણ 4 : $\frac{14}{39}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

અહીં પ્રચાલક છેદની સંખ્યાના દશકના અંક '3'નો એકાધિક '4' થશે.

અહીં અંશમાં બે અંકની સંખ્યા છે. પ્રચાલક વડે ભાગાકારની રીતથી પ્રક્રિયા કરવામાં તેના લીધે કોઈ ફરક પડતો નથી.

રીત 1 : પ્રચાલક '4' વડે ભાગાકારથી $\frac{14}{39} = 0._{2}3_{3}5_{3}8_{2}9_{1}7_{1}4_{2}3$

પગલું 1 : અંશ 14ને પ્રચાલક '4' વડે ભાગતાં $14 \div 4$,

ભાગફળ : 3, શેષ : 2

પગલું 2 : નવો ભાજ્ય 23, $23 \div 4$,

ભાગફળ : 5, શેષ : 3

પગલું 3 : નવો ભાજ્ય 35, $35 \div 4$,

ભાગફળ : 8, શેષ : 3

આ મુજબ પ્રક્રિયા કરતાં સાતમા દશાંશ સ્થાનથી અંકોનું પુનરાવર્તન શરૂ થઈ જાય છે.

$$\frac{14}{39} = 0.\dot{3}5897\dot{4}$$

રીત 2 : પ્રચાલક '4' વડે ગુણાકારથી

$\frac{14}{39} = {}_{1}4$ **પગલું 1 :** અહીં અંશની સંખ્યા બે અંકોની છે જેના એકમના અંક '4'ને દશાંશ સ્થાન તરીકે અને દશકના અંક '1'ને વદી તરીકે લખીશું.

$\frac{14}{39} = {}_{1}7_{1}4$ **પગલું 2 :** 4ને પ્રચાલક 4 વડે ગુણતાં $4 \times 4 = 16$, જેમાં વદી તરીકે '1' ઉમેરીશું. $\therefore\ 16 + 1 = 17$

7ને દશાંશ સ્થાન પર મૂકી 1 વદી તરીકે લખીશું.

$\frac{14}{39} = {}_{1}7_{1}4_{2}3_{3}5_{3}8_{2}9_{1}7_{1}4$ **પગલું 3 :** $(7 \times 4) + 1$ (વદી) $= 29$

ત્રીજું દશાંશ સ્થાન : 9, વદી : 2

આ પ્રમાણે પ્રક્રિયા કરતાં સાતમા દશાંશ સ્થાનથી અંકોનું પુનરાવર્તન શરૂ થઈ જાય છે.

$$\therefore \quad \frac{14}{39} = 0.\dot{3}5897\dot{4}$$

મહાવરો : 1

1. $\frac{2}{39}$ને દશાંશ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.
2. $\frac{1}{29}$ને સાત દશાંશ સ્થાન સુધી દર્શાવો.
3. $\frac{1}{79}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં કેટલા અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે ? દશાંશ સ્વરૂપમાં ફેરવી તમારા અનુમાનને ચકાસો.

4. $\frac{1}{49}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

5. $\frac{3}{59}$ને નવ દશાંશ સ્થાન સુધી દર્શાવો.

6. $\frac{1}{89}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

7. $\frac{11}{39}$ને દશાંશ સ્વરૂપમાં ફેરવો.

*

જે અપૂર્ણાંકના છેદની સંખ્યાનો એકમનો અંક 3 કે 7 હોય તેને છેદની સંખ્યાનો એકમનો અંક 9 મળે તેવા સમઅપૂર્ણાંકમાં રૂપાંતરિત કરતાં આવા અપૂર્ણાંકોની દશાંશ અભિવ્યક્તિ પણ આ જ રીતથી મેળવી શકાય.

જેમ કે, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{23}$, $\frac{1}{33}$ તેમજ $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{27}$ વગેરે.

અહીં $\frac{1}{13}$ અને $\frac{1}{7}$ના અંશ અને છેદને અનુક્રમે 3 અને 7 વડે ગુણવાથી તેના સમઅપૂર્ણાંક અનુક્રમે $\frac{3}{39}$ અને $\frac{7}{49}$ મળે.

ઉદાહરણ 5 : $\frac{1}{13}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

$$\frac{1}{13} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{39}$$

$\frac{3}{39}$ માટે પ્રચાલક છેદ 39ના દશકના અંક '3'નો એકાધિક '4' થશે.

પ્રચાલક 4 વડે પ્રક્રિયા ચલાવતાં,

$$\frac{3}{39} = 0._{3}0_{2}7_{3}6$$

પગલું 1 : અહીં ભાજક મોટો હોવાથી 3 ÷ 4,
ભાગફળ : 0, શેષ : 3

પગલું 2 : નવો ભાજ્ય 30, 30 ÷ 4,
ભાગફળ : 7, શેષ : 2

પગલું 3 : નવો ભાજ્ય 27, 27 ÷ 4,
ભાગફળ : 6, શેષ : 3

નવો ભાજ્ય 36 જે અંશ એ છેદના તફાવત (39 − 3) જેટલો છે. જેથી હવે પછીના અંકો ક્રમશઃ 9માંથી બાદ કરીને પણ મેળવી શકાય.

$$\therefore \quad \frac{3}{39} = \frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$$

ઉદાહરણ 6 : $\frac{1}{7}$ને દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં ફેરવો.

$$\frac{1}{7} \times \frac{7}{7} = \frac{7}{49}$$

$\frac{7}{49}$ માટે પ્રચાલક 5 થશે.

$\frac{7}{49} = 0.{}_{2}1$ **પગલું 1 :** 7 ÷ 5, ભાગફળ : 1, શેષ : 2

$\frac{7}{49} = 0.{}_{2}1{}_{1}4$ **પગલું 2 :** નવો ભાજ્ય : 21, 21 ÷ 5, ભાગફળ : 4, શેષ : 1

$\frac{7}{49} = 0.{}_{2}1{}_{1}4{}_{4}2$ **પગલું 3 :** નવો ભાજ્ય : 14, 14 ÷ 5, ભાગફળ : 2, શેષ : 4

નવો ભાજ્ય 42 જે અંશ એ છેદના તફાવત જેટલો જ છે. તેથી બાકીના અંકો 9માંથી બાદ કરીને મેળવી શકાશે. આ મુજબ પ્રક્રિયા ચલાવતાં,

$$\frac{7}{49} = 0.{}_{2}1{}_{1}4{}_{4}2\ 857$$

$$\therefore \quad \frac{7}{49} = \frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

મહાવરો : 2

1. $\frac{1}{53}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં કેટલા અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે ? $\frac{1}{53}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.
2. $\frac{1}{17}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં 16 અંકોનું આવર્તન છે. દશાંશ ચિહ્ન પછી 8 અંકો પ્રાપ્ત કર્યા પછી અડધું કામ થયાનો સંકેત મળે છે ? જો હા, તો બાકીના અંકો સમગ્ર પ્રક્રિયા 16 અંકો સુધી ચલાવ્યા વગર કઈ રીતે મેળવી શકાય ?
3. $\frac{1}{23}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ દશાંશ ચિહ્ન પછી 7 અંકો સુધી મેળવો.
4. $\frac{1}{27}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.
5. $\frac{1}{37}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો. વધુમાં વધુ કેટલા અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે.
6. $\frac{1}{43}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં કેટલા અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે ? અડધું કામ થયાનો સંકેત મળે છે ?

*

ઉત્તર

મહાવરો : 1

1. $\frac{2}{39} = 0.\dot{0}5128\dot{2}$
2. $\frac{1}{29} = 0.0344827$ (માત્ર સાત દશાંશ સ્થાન સુધી)
3. 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 અથવા 78 અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે.

   $\frac{1}{79} = 0.\dot{0}12658227848\dot{1}$

4. $\frac{1}{49} = 0.\dot{0}2040816326530612244897959183673469387755\dot{1}$

5. $\frac{3}{59} = 0.050847457$ (માત્ર નવ દશાંશ સ્થાન સુધી)

6. $\frac{1}{89} = 0.\dot{0}112359550561797752808988764044943820224719\dot{1}$

7. $\frac{11}{39} = 0.\dot{2}8205\dot{1}$

મહાવરો : 2

1. 1, 2, 4, 13, 26 અથવા 52 અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે.

$\frac{1}{53} = \frac{3}{159} = 0.\dot{0}18867924528\dot{3}$

2. $\frac{1}{17} = \frac{7}{119} = 0.{}_7 0_{10} 5_9 8_2 8_4 2_6 3_3 5_{11} 2$

અહીં દશાંશ ચિહ્ન પછી 8મા સ્થાને નવો ભાજ્ય 112 મળે છે. જે અંશ અને છેદના તફાવત (119 – 7) જેટલો છે, જેનાથી અડધું કામ થયાનો સંકેત મળે છે. બાકીના અંકો પ્રાપ્ત અંકોને 9માંથી બાદ કરી મેળવી શકાય.

3. $\frac{1}{23} = 0.0434782$ (સાત અંકો સુધી)

4. $\frac{1}{27} = 0.\dot{0}3\dot{7}$

5. $\frac{1}{37}$માં વધુમાં વધુ 36 અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે.

$\frac{1}{37} = 0.\dot{0}2\dot{7}$

6. 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 અથવા 42 અંકોનું આવર્તન હોઈ શકે.

$\frac{1}{43}$ની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં 21 (એકી સંખ્યાના) અંકોનું આવર્તન છે, તેથી અડધું કામ થયાનો સંકેત નહિ મળે.

2

ભાગાકાર સંક્રિયા

V4A5S7

વૈદિક ગણિતમાં ગુણાકારની સંક્રિયાની જેમ જ ભાગાકારની સંક્રિયા પણ ખૂબ જ સરળ છે. એમાં અનેક વિધિઓ ઉપયોગમાં લેવામાં આવે છે. જ્યારે ભાજક તેના આધારની નજીક એટલે કે આધારથી ઓછો હોય કે વધુ હોય છે ત્યારે ભાગાકારની સંક્રિયા અનુક્રમે 'निखिलं' સૂત્ર અને 'परावर्त्य' સૂત્રથી વધુ સરળતાથી અને ઝડપથી કરી શકાય છે.

સૂત્ર : निखिलं नवतश्चरमं दशतः

અર્થ : બધા (અંકોને) નવમાંથી અને અંતિમ (અંકને) દશમાંથી (બાદ કરતાં)

સંખ્યા	પૂરક સંખ્યા
9	1
8	2
87	13
91	09
539	461
765	235

આપણે અગાઉના ધોરણમાં 'निखिलं' સૂત્રની મદદથી પૂરક સંખ્યા શોધવાનું શીખી ગયા છીએ. 'निखिलं' વિધિથી ભાગાકાર કરવા માટે પૂરક સંખ્યા મેળવવી જરૂરી છે.

આ પ્રક્રિયામાં આધાર 10, 100, 1000,... વગેરેનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જ્યારે ભાજક સંખ્યા આધારથી નાની અને નજીકની હોય ત્યારે આ સૂત્રથી ભાગાકાર સરળતાથી કરી શકાય છે.

ભાગાકાર સંક્રિયા શરૂ કરતાં પહેલાં નિમ્નલિખિત બાબતો ધ્યાને રાખવી જોઈએ :

- ભાજકનો નજીકનો આધાર નિશ્ચિત કરી તેની પૂરક સંખ્યા શોધો. પૂરક સંખ્યાને સંશોધિત ગુણાંક પણ કહેવામાં આવે છે. આધારમાં જેટલા શૂન્ય હોય છે તેટલા અંકો પૂરક સંખ્યામાં હોય છે.
- ભાગાકારની ક્રિયામાં નિર્ધારિત સ્થાનને બે ઊભી રેખાઓ દ્વારા ત્રણ ખંડમાં વિભાજિત કરો. પ્રથમ ખંડને ભાજકખંડ, દ્વિતીય ખંડને ભાજ્યખંડ અને તૃતીય ખંડને શેષખંડ નામ આપો.
- ડાબી તરફથી પ્રથમ ખંડમાં ભાજક તથા તેની નીચે તેની પૂરક સંખ્યા લખો.
- આધારમાં જેટલા શૂન્ય, ભાજ્યના તેટલા જ છેલ્લા અંકો તૃતીય ખંડમાં લખો.
- ભાજ્યના બાકીના અંકો દ્વિતીય ખંડમાં લખો.

ઉદાહરણ 1 : $123 \div 9$ ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો.

ભાજ્ય = 123, આધાર = 10

$\therefore$ પૂરક સંખ્યા = 10 – 9 = 1

આધારમાં એક શૂન્ય હોવાથી ભાજ્યનો અંતિમ અંક 3 તૃતીય ખંડમાં અને 12 દ્વિતીય ખંડમાં લખો. તેથી લખવાનું સ્વરૂપ નીચે મુજબ બનશે :

	પ્રથમ ખંડ	દ્વિતીય ખંડ	તૃતીય ખંડ
	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 2	3
પૂરક સંખ્યા	1		

પગલું 1 : ભાજ્ય ખંડના પ્રથમ અંક 1ને ભાગફળના પ્રથમ અંક 1 તરીકે લઈ લેવામાં આવે છે.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 2	3
પૂરક સંખ્યા	1	↓	
	ભાગફળ	1	

પગલું 2 : ભાગફળમાં મળેલ 1ને પૂરક સંખ્યા 1 વડે ગુણી ભાજ્યખંડના બીજા અંક 2ની નીચે મૂકી સરવાળો કરતાં 3 મળે. જે ભાગફળના બીજા અંક તરીકે લેવામાં આવે છે.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 2	3
પૂરક સંખ્યા	1	1	
	ભાગફળ	1 3	

પગલું 3 : ભાજ્ય ખંડમાંના 2 અને 1નો સરવાળો 3 થાય છે. તેને પૂરક સંખ્યા 1 વડે ગુણી શેષ ખંડના ખાનામાં રહેલ 3ની નીચે મૂકી સરવાળો કરતાં 6 મળે.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 2	3
પૂરક સંખ્યા	1	1	3
	ભાગફળ	1 3	6

આમ, ભાગફળ 13 અને શેષ 6 મળશે.

ઉદાહરણ 2 : $141 \div 9$ ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 4	1
પૂરક સંખ્યા	1	↓ 1	5
	ભાગફળ	1 5	6

આમ, ભાગફળ 15 અને શેષ 6 મળશે.

સમજૂતી :

- ભાજક 9નો આધાર 10 છે. માટે શેષ ખંડમાં ભાજ્યનો છેલ્લો એક અંક 1 લખી ત્રણ ભાગ કરતાં અને ભાજ્યખંડમાં 14 લખતાં.
- 9ની પૂરક સંખ્યા 1ને 9ની નીચે લખતાં.
- ભાજ્ય ખંડના પ્રથમ અંક 1ને ભાગફળના પ્રથમ અંક તરીકે લખતાં.
- ભાગફળના 1 અને પૂરક સંખ્યા 1નો ગુણાકાર કરી મળતી સંખ્યા 1ને ભાજ્ય ખંડના બીજા અંક 4ની નીચે લખી સરવાળો 4 + 1 = 5 કરતાં થશે.
- ભાગફળના 5 અને પૂરક સંખ્યા 1નો ગુણાકાર કરી મળતી સંખ્યા 5ને શેષ ખંડમાં 1ની નીચે લખી સરવાળો કરતાં 1 + 5 = 6 થશે.

  ∴ ભાગફળ 15 અને શેષ 06 મળે.

ઉદાહરણ 3 : 12032ને 9 વડે ભાગતાં ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 2 0 3	2
પૂરક સંખ્યા	1	↓ 1 3 3	6
	ભાગફળ	1 3 3 6	8

આમ, ભાગફળ 1336 અને શેષ 8 મળશે.

સમજૂતી :

- ભાજક 9 અને પૂરક સંખ્યા 1
- ભાજ્ય 12032માંથી 1203 ભાજ્ય ખંડમાં અને 2 શેષ ખંડમાં લખતાં.
- ભાજ્ય ખંડના પ્રથમ અંક 1ને ભાગફળના પ્રથમ અંક તરીકે લખતાં.
- 1 × 1 (પૂરક સંખ્યા) = 1ને 2ની નીચે લખી સરવાળો કરી 3ને ભાગફળમાં લખતાં.
- 3 × 1 (પૂરક સંખ્યા) = 3ને 0ની નીચે લખી સરવાળો 3ને ભાગફળમાં લખતાં.
- 3 × 1 (પૂરક સંખ્યા) = 3ને 3ની નીચે લખી સરવાળો 3 + 3 = 6 ભાગફળમાં લખતાં.
- 6 × 1 (પૂરક સંખ્યા) = 6ને શેષ ખંડમાં 2ની નીચે લખી સરવાળો 2 + 6 = 8 લખતાં.

  ∴ ભાગફળ 1336, શેષ 8

ઉદાહરણ 4 : 13217ને 9 વડે ભાગતાં ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 3 2 1	7
પૂરક સંખ્યા	1	↓ 1 4 6	7
	ભાગફળ	1 4 6 7	1 4
		+ 1	–9
		1 4 6 8	0 5

અહીં શેષ 14 મળે છે, જે ભાજક 9 થી મોટી સંખ્યા છે.

∴ 14ને 9 વડે ફરીથી ભાગતાં,

14 ÷ 9 કરતાં ભાગફળ 1, શેષ 5

∴ 13217 ÷ 9 માં ભાગફળ = 1467 + 1 = 1468 અને શેષ = 14 – 9 = 5 મળે છે.

આમ, ભાગફળ 1468 અને શેષ 5 મળશે.

ઉદાહરણ 5 : 1253 ÷ 8 ભાગાકાર કરી ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	8	1 2 5	3
પૂરક સંખ્યા	2	↓ 2 8	2 6
	ભાગફળ	1 4 $_1$3	2 9
		= 1 5 3	2 9
		+ 3	– 2 4
		1 5 6	0 5

સમજૂતી :

- ભાગફળ ખંડમાં 5 + 8 = 13 ને $_1$3ની રીતે લખાય છે. 1ને વદી ગણીને આગળના અંક 4માં ઉમેરવી.
- અહીં શેષ 29 મળે છે, જે ભાજક 8થી મોટી સંખ્યા છે.

∴ 29ને 8 વડે ફરીથી ભાગતાં,

29 ÷ 8 કરતાં ભાગફળ 3, શેષ 5

∴ 1253 ÷ 8 માં ભાગફળ = 153 + 3 = 156, શેષ = 5

આમ, ભાગફળ 156 અને શેષ 5 મળશે.

ઉદાહરણ 6 : ભાગફળ અને શેષ મેળવો : 1638102 ÷ 9

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9	1 6 3 8 1 0	2
પૂરક સંખ્યા	1	↓ 1 7 10 18 19	19
	ભાગફળ	1 7 $_1$0 $_1$8 $_1$9 $_1$9	21
	=	1 8 2 0 0 9	
		+ 2	– 18
		1 8 2 0 1 1	03

આમ, ભાગફળ 182011 અને શેષ 3 મળશે.

અહીં, ભાગફળના છેલ્લા ચાર અંકોમાં 3 + 7 = 10, 8 + 10 = 18, 1 + 18 = 19, 0 + 19 = 19

આવે છે, જેને અનુક્રમે $_1 0$, $_1 8$, $_1 9$, $_1 9$ રીતે લખેલું છે.

અહીં નીચે લખેલ નાનો અંક વદીનો અંક છે. આ વદીના અંક આગળની સંખ્યામાં ઉમેરતાં ભાગફળ = 182009 બને છે અને શેષ 21 છે જે 9 કરતાં મોટી છે તેથી 21 ÷ 9 કરતાં ભાગફળ 2 અને શેષ 3 રહે.

ભાગફળ 182009 + 2 = 182011, શેષ 03

ઉદાહરણ 7 : 1245 ÷ 97 ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9 7	1 2	4 5
પૂરક સંખ્યા	0 3	↓ 0	3
			0 6
	ભાગફળ	1 2	7 $_1$1
			8 1

- ભાજક 97, આધાર 100, આધારમાં છેલ્લા બે શૂન્ય હોવાથી પૂરક સંખ્યા 03
- ભાજ્યના ખંડમાં 12 અને શેષ ખંડમાં 45 લખો.
- ભાજ્ય ખંડમાં 1ની નીચે ભાગફળમાં 1 લખો. 1ને 03 વડે ગુણતાં 03 મળે. જે 2ની નીચે 0 અને 4ની નીચે 3 એવી રીતે લખો.
- 2 + 0 = 2 ભાગફળમાં નીચે લખો તેમજ 2 × 03 = 06 થાય. જેમાં 4ની નીચે 0 અને 5ની નીચે 6 લખો.
- 4 + 3 + 0 = 7 અને 5 + 6 = 11 થશે.
- 11માં દશકનો અંક વદી તરીકે આગળના 7માં ઉમેરો.

  7 + 1 = 8 થશે.

  આમ, ભાગફળ 12, શેષ 81 મળશે.

ઉદાહરણ 8 : 215840 ÷ 96 ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9 6	2 1 5 8	4 0
પૂરક સંખ્યા	0 4	0 8	
		0 4	
		5	2
			6 8
	ભાગફળ	2 1 $_1$3 $_1$7	1 2 8
		= 2 2 4 7	
		+ 1	– 9 6
		2 2 4 8	3 2

∴ ભાગફળ 2248, શેષ 32

ઉદાહરણ 9 : 34536 ÷ 94 ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	9 4	3 4 5	3 6
પૂરક સંખ્યા	0 6	1 8	
		3	0
			9 6
ભાગફળ		3 5 $_1$6	1 3 2
		= 3 6 6	
		+ 1	– 9 4
		3 6 7	3 8

આમ, ભાગફળ 367, શેષ 38

મહાવરો : 1

'निखिलं' સૂત્ર દ્વારા ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો :

(1) 227 ÷ 9 (2) 120021 ÷ 9 (3) 154 ÷ 9

(4) 10013 ÷ 97 (5) 24538 ÷ 99 (6) 12351 ÷ 8

(7) 32450 ÷ 97 (8) 120547 ÷ 93

*

'परावर्त्य' સૂત્રથી ભાગાકાર

સૂત્ર : परावर्त्य योजयेत्

અર્થ : પક્ષાંતર કરીને ઉપયોગ કરો.

જો ભાજક આધારની નજીક અને વધુ હોય તો 'परावर्त्य योजयेत्' સૂત્રથી સરળતાથી ભાગાકાર કરી શકાય છે.

સમજૂતી :

- ભાજકના નજીકના આધારનો વિચલનાંક શોધો. અહીં વિચલનાંક પૂરક સંખ્યાનું ઋણાત્મક મૂલ્ય હોય છે.
- વિચલનાંકના ચિહ્ન પરાવર્તિત કરો.
- આગળની ક્રિયા અને પ્રશ્ન લખવાનું સ્વરૂપ 'निखिलं' સૂત્રની જેમ જ છે.

ભાગફળ અને શેષ માત્ર ઘનાંક મળે તેવાં ઉદાહરણોનો અહીં અભ્યાસ કરીશું.

ઉદાહરણ 10 : 3434 ÷ 11 ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	1 1	3 4 3	4
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	$\bar{1}$	–3 –1	–2
ભાગફળ		3 1 2	2

∴ ભાગફળ 312, શેષ 2 મળશે.

ઉદાહરણ 11 : 1234 ÷ 112 ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	1 1 2	1 2	3 4
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	$\bar{1}$ $\bar{2}$	–1	–2
			–1 –2
ભાગફળ		1 1	0 2

∴ ભાગફળ 11 તથા શેષ 02

ઉદાહરણ 12 : 1154 ÷ 103 ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
	1 0 3	1 1	5 4
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	0 $\bar{3}$	0	–3
			0 –3
ભાગફળ		1 1	2 1

∴ ભાગફળ 11 તથા શેષ 21

મહાવરો : 2

'परावर्त्य योजयेत्' સૂત્ર દ્વારા ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ મેળવો :

(1) 166 ÷ 11 (2) 1358 ÷ 113 (3) 5089 ÷ 101

(4) 2894 ÷ 12 (5) 4499 ÷ 102 (6) 7843 ÷ 11

ઉત્તર

મહાવરો : 1

(1) ભાગફળ = 25, શેષ = 02 (2) ભાગફળ = 13335, શેષ = 06

(3) ભાગફળ = 17, શેષ = 01 (4) ભાગફળ = 103, શેષ = 22

(5) ભાગફળ = 247, શેષ = 85 (6) ભાગફળ = 1543, શેષ = 07

(7) ભાગફળ = 334, શેષ = 52 (8) ભાગફળ = 1296, શેષ = 19

મહાવરો : 2

(1) ભાગફળ = 15, શેષ = 1 (2) ભાગફળ = 12, શેષ = 02

(3) ભાગફળ = 50, શેષ = 39 (4) ભાગફળ = 241, શેષ = 02

(5) ભાગફળ = 44, શેષ = 11 (6) ભાગફળ = 713, શેષ = 00

3

'परावर्त्य' સૂત્રથી બહુપદીના ભાગાકાર

C8U4M3

આપણે અગાઉના પ્રકરણમાં સંખ્યાઓના ભાગાકાર કરવાનું શીખી ગયા છીએ. આ અધ્યાયમાં બહુપદીનો બહુપદી સાથેનો ભાગાકાર વૈદિક ગણિતના સૂત્ર परावर्त्य योजयेत् થી સરળતાથી અને ઝડપથી કરતાં શીખીશું. આ સૂત્રથી બહુપદીનો ભાગાકાર સુરેખ દ્વિપદી વડે શીખીશું.

સૂત્ર : परावर्त्य योजयेत्

અર્થ : પક્ષાંતર કરીને ઉપયોગ કરો.

પક્ષાંતરના નિયમ મુજબ ભાજક બહુપદીના બીજા પદ (અચળ પદ)ના ચિહ્નનું પરિવર્તન કરવામાં આવે છે. એટલે કે ઘન ચિહ્ન ઋણ બની જાય છે અને ઋણ ચિહ્ન ઘન બની જાય છે. પરાવર્ત્ય સંખ્યા એ ભાજક બહુપદીનું શૂન્ય જ છે. આ રીતમાં ગણતરી કરતી વખતે બહુપદીના સહગુણકનો જ ઉપયોગ થાય છે. ત્યારબાદ ચલનો ઉપયોગ કરીને ભાગફળ બહુપદી અને શેષ (બહુપદી) મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 1 : $x^2 + 16x + 63$ ને $x + 9$ વડે ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો.

અહીં ભાજક બહુપદી સુરેખ (એકઘાતી) દ્વિપદી છે, માટે ભાજ્ય બહુપદીના પ્રથમ બે પદોના સહગુણકોને ભાજ્યના ખંડમાં તેમજ ત્રીજા પદને શેષના ખંડમાં લખીશું તેમજ ભાજક બહુપદી $x + 9$ હોવાથી 'परावर्त्य' સૂત્ર મુજબ +9 ચિહ્ન બદલીને –9ને ભાજક ખંડમાં લખીશું.

ભાજક ખંડ		ભાજ્ય ખંડ		શેષ ખંડ	
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	–9	1	+ 16	+6	3
		↓	–9	–6	3
ભાગફળ		1	+7		0

ભાગફળ $= 1x + 7 = x + 7$, શેષ $= 0$

સમજૂતી :

- ભાજ્ય બહુપદીના સહગુણકો 1 અને +16ને ભાજ્યખંડમાં અને +63ને શેષ ખંડમાં લખતાં.
- ભાજક બહુપદીના અચળ પદ '9'ની વિરોધી સંખ્યા (–9)ને પરાવર્ત્ય સંખ્યા તરીકે ભાજક ખંડમાં લખતાં.
- ભાજ્યખંડના પ્રથમ સહગુણક 1ને ભાગફળના પ્રથમ અંક તરીકે લખતાં.
- ભાગફળ ખંડમાં મળેલી પ્રથમ સંખ્યા 1 સાથે પરાવર્ત્ય સંખ્યા –9 વડે ગુણતાં $(-9) \times 1 = (-9)$
- ગુણાકારથી મળેલી સંખ્યા (–9)ને ભાજ્ય ખંડના દ્વિતીય સહગુણક +16 નીચે મૂકી તેનો સરવાળો કરતાં, $16 + (-9) = 7$.
- સરવાળાથી મળેલી સંખ્યા 7 સાથે પરાવર્ત્ય સંખ્યા (–9)નો ગુણાકાર કરતાં $(-9) \times 7 = (-63)$ થાય, જેને શેષ ખંડમાં +63ની નીચે મૂકી તેમનો સરવાળો કરતાં, $63 + (-63) = 0$ થાય.

- ભાગફળના ખંડમાં 1, 7 છે. જે ભાજ્ય બહુપદીના પ્રથમ પદ 'x^2'ની ઘાત કરતાં એક ઓછી ઘાતવાળું પદ x નો સહગુણક 1 અને અચળપદ 7 થશે.

  આમ, ભાગફળ $= 1x + 7 = x + 7$ અને શેષ $= 0$ થશે.

ઉદાહરણ 2 : $x^2 - 7x + 10$ ને $x - 2$ વડે ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	2	1 –7	10
		↓ 2	–10
ભાગફળ		1 –5	0

$\therefore$ ભાગફળ $= 1x - 5 = x - 5$, શેષ $= 0$

ઉદાહરણ 3 : $x^2 + 8x + 14$ ને $x + 2$ વડે ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	–2	1 8	14
		↓ –2	–12
ભાગફળ		1 6	2

$\therefore$ ભાગફળ $= 1x + 6 = x + 6$, શેષ $= 2$

ઉદાહરણ 4 : $x^3 + 1$ ને $x + 1$ વડે ભાગીને ભાગફળ તથા શેષ શોધો. અહીં ભાજ્ય બહુપદીમાં x^3 પછી x^2 અને x^1 ચલવાળા પદ નથી. તેથી તેના સહગુણકો '0' મૂકી, ઉપર મુજબ ગણતરી કરો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	–1	1 0 0	+1
		↓ –1 +1	–1
ભાગફળ		1 –1 +1	0

$\therefore$ ભાગફળ $= 1x^2 - 1x + 1 = x^2 - x + 1$, શેષ $= 0$

ઉદાહરણ 5 : બહુપદી $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$નો $x - 1$ વડે ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો.

અહીં ભાજ્ય બહુપદીમાં ક્રમશઃ ઉતરતી ઘાતના પદોમાં બે ઘાતવાળું પદ x^2 નથી, તેથી તેનો સહગુણક '0' લખો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	1	3 –4 0 –3	–1
		↓ +3 –1 –1	–4
ભાગફળ		3 –1 –1 –4	–5

$\therefore$ ભાગફળ $= 3x^3 - x^2 - x - 4$, શેષ $= -5$

ઉદાહરણ 6 : $6x^2 + x - 2$ ને $2x - 1$ વડે ભાગો.

અહીં ભાજક $2x - 1$ ને પરાવર્ત્ય સૂત્ર મુજબ પક્ષાંતર કરતાં $\frac{1}{2}$ થશે.

ભાજક ખંડ		ભાજ્ય ખંડ		શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	$\frac{1}{2}$	6	+1	–2
		↓	3	2
ભાગફળ		6	4	0
		$\frac{6}{2}$	$\frac{4}{2}$	
		= 3	= 2	

$\therefore$ ભાગફળ $= 3x + 2$, શેષ $= 0$

સમજૂતી :

- ભાજ્ય બહુપદીના સહગુણકો 6 અને 1ને ભાજ્યખંડમાં અને –2ને શેષ ખંડમાં લખતાં.
- ભાજક બહુપદીની પરાવર્ત્ય સંખ્યા $\frac{1}{2}$ ભાજક તરીકે લો.
- ભાજ્ય ખંડની પ્રથમ સંખ્યા 6ને ભાગફળના પ્રથમ અંક તરીકે લખતાં.
- ભાગફળ ખંડમાં મળેલી સંખ્યા 6 સાથે પરાવર્ત્ય સંખ્યા $\frac{1}{2}$ વડે ગુણતાં. $6 \times \frac{1}{2} = 3$
- ગુણાકારથી મળેલી સંખ્યા 3ને ભાજ્યખંડના દ્વિતીય સહગુણક +1 ની નીચે મૂકી તેનો સરવાળો કરતાં $1 + 3 = 4$
- સરવાળાથી મળેલી સંખ્યા 4 સાથે પરાવર્ત્ય સંખ્યા $\frac{1}{2}$નો ગુણાકાર કરતાં $4 \times \frac{1}{2} = 2$ થાય. જેને શેષ ખંડમાં (–2)ની નીચે મૂકી તેમનો સરવાળો કરતાં $(-2) + 2 = 0$ થાય.
- પરાવર્ત્ય સંખ્યા $\frac{1}{2}$ અપૂર્ણાંક હોવાથી ભાગફળ ખંડની સંખ્યા 6 અને 4ને પરાવર્ત્ય સંખ્યાના છેદ 2 વડે ભાગતાં અનુક્રમે 3 અને 2 આવે.

  $\therefore$ ભાગફળ $= 3x + 2$, શેષ $= 0$

ઉદાહરણ 7 : $25x^2 + 30x + 15$ ને $5x + 3$ વડે ભાગો.

અહીં ભાજક બહુપદી $5x + 3$ ની પરાવર્ત્ય સંખ્યા $-\frac{3}{5}$ થશે.

ભાજક ખંડ		ભાજ્ય ખંડ		શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	$-\frac{3}{5}$	25	30	15
		↓	–15	–9
ભાગફળ		25	15	6
		$\frac{25}{5}$	$\frac{15}{5}$	
		= 5	= 3	

$\therefore$ ભાગફળ $= 5x + 3$, શેષ $= 6$

મહાવરો

ભાગાકાર કરીને ભાગફળ અને શેષ શોધો :

(1) $(x^2 + 11x + 30) \div (x + 6)$

(2) $(x^2 - 22x + 120) \div (x - 12)$

(3) $(x^2 - 10x + 22) \div (x - 5)$

(4) $(x^2 - x - 8) \div (x - 3)$

(5) $(x^2 - 15x + 50) \div (x - 5)$

(6) $(x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1) \div (x - 1)$

(7) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 3)$

(8) $(x^2 - 81) \div (x + 9)$

(9) $(2x^2 + 3x - 30) \div (2x - 7)$

(10) $(2x^2 - 11x + 16) \div (-3 + 2x)$

ઉત્તર

(1) ભાગફળ $= x + 5$, શેષ $= 0$

(2) ભાગફળ $= x - 10$, શેષ $= 0$

(3) ભાગફળ $= x - 5$, શેષ $= -3$

(4) ભાગફળ $= x + 2$, શેષ $= -2$

(5) ભાગફળ $= x - 10$, શેષ $= 0$

(6) ભાગફળ $= x^3 + 2x^2 + 1$, શેષ $= 2$

(7) ભાગફળ $= x^2 - x - 2$, શેષ $= 0$

(8) ભાગફળ $= x - 9$, શેષ $= 0$

(9) ભાગફળ $= x + 5$, શેષ $= 5$

(10) ભાગફળ $= x - 4$, શેષ $= 4$

4

બહુપદીના અવયવો

'અવયવો' એ એક મહત્ત્વપૂર્ણ બીજગણિતિક વિષયાંગ છે કે જે ઘણા બધા ગાણિતિક પ્રશ્નો ઉકેલવામાં મહત્ત્વ ધરાવે છે. વૈદિક ગણિતની પદ્ધતિ દ્વારા આપણે કોઈ પણ દ્વિઘાત કે ત્રિઘાત બહુપદીઓના અવયવ સરળતાથી મેળવી શકીએ છીએ. અવયવીકરણની વૈદિક ગણિતની પદ્ધતિ સમજવાનો પ્રયાસ કરીએ.

આ પ્રકરણમાં સમાવિષ્ટ મુખ્ય મુદ્દાઓ :

(1) એકચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો ($ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$)

(i) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 હોય. ($a = 1$)

(ii) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 ન હોય. ($a \neq 1$)

(2) દ્વિચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો ($ax^2 + bxy + cy^2$, $a \neq 0$)

(i) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 હોય. ($a = 1$)

(ii) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 ન હોય. ($a \neq 1$)

(3) બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો

(4) એકચલ ત્રિઘાત બહુપદીના અવયવો

આ પ્રકરણમાં સમાવિષ્ટ વૈદિક ગણિતના સૂત્રો, ઉપસૂત્રો તથા સંકલ્પનાઓ :

(1) **સૂત્ર : विलोकनम्**

અર્થ : અવલોકન દ્વારા

(2) **સૂત્ર : आनुरुप्येण**

અર્થ : અનુરૂપતા (પ્રમાણ) દ્વારા

(3) **સૂત્ર : आद्यमाधेनान्त्यमन्त्येन**

અર્થ : પ્રથમને પ્રથમ દ્વારા અને અંતિમને અંતિમ દ્વારા

(4) **સૂત્ર : लोपनस्थापनाभ्याम्**

અર્થ : લોપન તથા સ્થાપના દ્વારા

(5) **સૂત્ર : परावर्त्य योजयेत्**

અર્થ : પક્ષાંતર કરીને ઉપયોગ કરો.

આ પ્રકરણની વધુ સમજ કેળવવા સમાવિષ્ટ ગણિતના કેટલાક ખ્યાલો :

(1) 'विलोकनम्'થી ($x + 1$) અવયવની ચકાસણી

(2) 'विलोकनम्'થી ($x - 1$) અવયવની ચકાસણી

પ્રમાણિત સ્વરૂપની ($ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$) દ્વિઘાત બહુપદીઓના અવયવીકરણની સામાન્ય રીત :

પ્રમાણિત સ્વરૂપની ($ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$) દ્વિઘાત બહુપદીઓના અવયવો આપણે $(x + a)(x + b)$ સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરીએ છીએ. આ માટે, મધ્યમ પદને બે ભાગમાં વિભાજિત કરીએ છીએ.

ઉદાહરણ 1 : $x^2 + 5x + 6$ ના સામાન્ય રીતે અવયવ પાડો.

$$x^2 + 5x + 6$$
$$= x^2 + 3x + 2x + 6$$
$$= x(x + 3) + 2(x + 3)$$
$$= (x + 2)(x + 3)$$

ઉદાહરણ 2 : $2x^2 + 5x + 2$ ના સામાન્ય રીતે અવયવ પાડો.

$$2x^2 + 5x + 2$$
$$= 2x^2 + 4x + x + 2$$
$$= 2x(x + 2) + 1(x + 2)$$
$$= (2x + 1)(x + 2)$$

વૈદિક ગણિતના સૂત્ર દ્વારા એકચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો :

(i) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 હોય : (विलोकनम् દ્વારા)

વૈદિક ગણિતની આ રીત સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 3 : $x^2 + 5x + 6$

$= (x + 2)(x + 3)$ **પગલું 1 :** '6'ના એવા બે અવયવો કે જેનો સરવાળો '5' થાય.

ઉદાહરણ 4 : $x^2 - x - 6$

$= (x - 3)(x + 2)$ **પગલું 1 :** '–6'ના એવા બે અવયવો કે જેનો સરવાળો '–1' થાય.

ઉદાહરણ 5 : $x^2 + x - 6$

$= (x + 3)(x - 2)$ **પગલું 1 :** '–6'ના એવા બે અવયવો કે જેનો સરવાળો '+1' થાય.

ઉદાહરણ 6 : $x^2 - 5x + 6$

$= (x - 3)(x - 2)$ **પગલું 1 :** '+6'ના એવા બે અવયવો કે જેનો સરવાળો '–5' થાય.

જો ઉપરોક્ત દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આ સૂત્રનો ઉપયોગ બરાબર સમજી લેવાય તો કોઈ પણ એકચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો, જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 હોય ત્યારે ખૂબ જ સરળતાથી મેળવી શકાય.

મહાવરો : 1

નીચે આપેલી દ્વિઘાત બહુપદીઓના 'विलोकनम्'ની રીતે અવયવ પાડો :

(1) $x^2 + 12x + 27$ (2) $a^2 + 2a - 15$ (3) $x^2 - 8x + 15$

(4) $m^2 - 10m + 21$ (5) $x^3 - 6x^2 + 9x$

(ii) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 ન હોય : ('आनुरुप्येण' તથા 'आद्यमाधेनान्त्यमन्त्येन' દ્વારા)

વૈદિક ગણિતની આ રીત સમજવા એક ઉદાહરણ લઈશું.

ઉદાહરણ 7 : અવયવ પાડો : $2x^2 + 5x + 2$

પગલું 1 : $2x^2 + 4x + x + 2$

મધ્યમપદના સહગુણકના બે ભાગ = 4 અને 1

પગલું 2 : 'आनुरुप्येण'

પ્રથમ પદનો સહગુણક : મધ્યમપદના સહગુણકનો પ્રથમ ભાગ = 2:4 = 1:2

મધ્યમ પદનો સહગુણકનો દ્વિતીય ભાગ : અંતિમ પદનો સહગુણક (અચળ પદ) = 1:2

બંને ગુણોત્તર સમાન છે, આથી $(x + 2)$ એક અવયવ થાય.

પગલું 3 : 'आद्यमाधेनान्त्यमन्त्येन'

$$\frac{\text{બહુપદીનું પ્રથમ પદ}}{\text{પ્રથમ અવયવનું પ્રથમ પદ}} + \frac{\text{બહુપદીનું અંતિમ પદ}}{\text{પ્રથમ અવયવનું અંતિમ પદ}}$$

$$\frac{2x^2}{x} + \frac{2}{2} = (2x + 1)$$

આથી $(2x + 1)$ બીજો અવયવ થાય.

$$\therefore \quad 2x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(2x + 1)$$

જો ઉપરોક્ત દર્શાવ્યા પ્રમાણે, આ સૂત્રનો ઉપયોગ બરાબર સમજી લેવાય તો કોઈ પણ, એકચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો, જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 ન હોય, ત્યારે ખૂબ જ સરળતાથી મેળવી શકાય.

હવે, મહાવરા માટે થોડા બીજા ઉદાહરણ લઈ મૌખિક ગણતરી દ્વારા અવયવો મેળવતા શીખીશું.

ઉદાહરણ 8 : અવયવ પાડો : $3x^2 - 7x + 2$

$-6 \quad -1$

પગલું 1 : $(-7x)$ના બે ભાગ પાડવા.

જે $(-6x)$ અને $(-x)$ બને.

$(x - 2) \rightarrow$ એક અવયવ

પગલું 2 : પ્રથમ પદનો સહગુણક :

મધ્યમ પદના સહગુણકનો પ્રથમ ભાગ

$3 : (-6) = 1 : (-2)$

મધ્યમ પદના સહગુણકનો દ્વિતીય ભાગ :

અંતિમ પદનો સહગુણક (અચળ પદ)

$(-1) : (+2) = 1 : (-2)$

$$\frac{3x^2}{x} + \frac{2}{-2}$$

પગલું 3 :

$$\frac{\text{બહુપદીનું પ્રથમ પદ}}{\text{પ્રથમ અવયવનું પ્રથમ પદ}} + \frac{\text{બહુપદીનું અંતિમ પદ}}{\text{પ્રથમ અવયવનું અંતિમ પદ}}$$

$(3x - 1) \rightarrow$ બીજો અવયવ

$\therefore \quad 3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$

ઉદાહરણ 9 : અવયવ પાડો : $7x^2 - 6x - 1$

$-7 \quad +1$ **પગલું 1 :** $(-6x)$ના બે ભાગ = $(-7x)$, $(+x)$

$(x - 1) \rightarrow$ એક અવયવ **પગલું 2 :** $7 : (-7) = 1 : (-1)$

$1 : (-1) = 1 : (-1)$

$(7x + 1) \rightarrow$ બીજો અવયવ **પગલું 3 :** $\dfrac{7x^2}{x} + \dfrac{(-1)}{(-1)}$

$\therefore \quad 7x^2 - 6x - 1 = (x - 1)(7x + 1)$

મહાવરો : 2

નીચે આપેલી દ્વિઘાત બહુપદીઓના 'आनुरुप्येण' તથા 'आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन'ની રીતે અવયવ પાડો :

(1) $6x^2 + 17x + 5$ (2) $2x^2 + 7x + 3$ (3) $12x^2 - 7x + 1$

(4) $6x^2 + 5x - 6$ (5) $3x^2 - x - 4$

*

વૈદિક ગણિતના સૂત્ર 'आनुरुप्येण' તથા 'आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन' દ્વારા દ્વિચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો :

અહીં પણ ઉપરોક્ત દર્શાવેલી રીતે આગળ વધીશું. અહીં ફરક માત્ર એ છે કે, અચળ પદની જગ્યાએ ચલવાળું પદ હશે. અહીં પણ બે પ્રકારની બહુપદીઓ હોઈ શકે. (i) જ્યારે x^2નો સહગુણક 1 હોય અને (ii) જ્યારે x^2નો સહગુણક 1 ન હોય. તેના અવયવ પાડવા માટે વૈદિક ગણિતની આ રીત સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ લઈશું.

(i) જ્યારે x^2નો સહગુણક 1 હોય :

ઉદાહરણ 10 : અવયવ પાડો : $a^2 - 3ab - 40b^2$

$-8 \quad +5$ **પગલું 1 :** $(-3ab)$ના બે ભાગ = $(-8ab)$, $(+5ab)$

$(a - 8b) \rightarrow$ એક અવયવ **પગલું 2 :** $1 : (-8)$

$5 : (-40) = 1 : (-8)$

$(a + 5b) \rightarrow$ બીજો અવયવ **પગલું 3 :** $\dfrac{a^2}{a} + \dfrac{(-40b^2)}{(-8b)} = (a + 5b)$

$\therefore \quad a^2 - 3ab - 40b^2 = (a - 8b)(a + 5b)$

ઉદાહરણ 11 : અવયવ પાડો : $x^2 - 3ax - 88a^2$

$-11 \quad +8$ **પગલું 1 :** $(-3ax)$ના બે ભાગ = $(-11ax)$, $(+8ax)$

$(x - 11a) \rightarrow$ એક અવયવ **પગલું 2 :** $1 : (-11) = 1 : (-11)$

$8 : (-88) = 1 : (-11)$

$(x + 8a) \rightarrow$ બીજો અવયવ **પગલું 3 :** $\frac{x^2}{x} + \frac{(-88a^2)}{(-11a)} = x + 8a$

$\therefore \quad x^2 - 3ax - 88a^2 = (x - 11a)(x + 8a)$

(ii) જ્યારે x^2 નો સહગુણક 1 ન હોય :

ઉદાહરણ 12 : અવયવ પાડો : $6a^2 - ab - 15b^2$

$-10 \quad +9$ **પગલું 1 :** $(-ab)$ના બે ભાગ $= (-10ab), (+9ab)$

$(3a - 5b) \rightarrow$ એક અવયવ **પગલું 2 :** $6 : (-10) = 3 : (-5)$

$9 : (-15) = 3 : (-5)$

$(2a + 3b) \rightarrow$ બીજો અવયવ **પગલું 3 :** $\frac{6a^2}{3a} + \frac{(-15b^2)}{(-5b)}$

$\therefore \quad 6a^2 - ab - 15b^2 = (3a - 5b)(2a + 3b)$

મહાવરો : 3

નીચે આપેલી દ્વિઘાત બહુપદીઓના 'आनुरूप्येण' તથા 'आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन'ની રીતે અવયવ પાડો :

(1) $x^2 + 9xy + 18y^2$ (2) $4a^2 + 13ab + 9b^2$ (3) $25a^2 + 29ab + 4b^2$

(4) $9m^2 + 30mn + 9n^2$ (5) $49a^2 + 70ab + 25b^2$

*

વૈદિક ગણિતના સૂત્ર 'लोपनस्थापनाभ्याम्' દ્વારા બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવો :

બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીઓના અવયવ વૈદિક ગણિતની આ રીતે સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ લઈશું.

ઉદાહરણ 13 : અવયવ પાડો : $4a^2 + 2b^2 + 9c^2 + 6ab + 11bc + 13ca$

પગલું 1 : $4a^2 + 2b^2 + 9c^2 + 6ab + 11bc + 13ca$

$c = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$= \quad 4a^2 + 2b^2 + 6ab$

$= \quad 4a^2 + 6ab + 2b^2$

$= \quad (a + b)(4a + 2b)$ (आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन સૂત્રની રીતે)

પગલું 2 : $4a^2 + 2b^2 + 9c^2 + 6ab + 11bc + 13ca$

$b = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$= \quad 4a^2 + 9c^2 + 13ca$

$= \quad 4a^2 + 13ca + 9c^2$

$= \quad (a + c)(4a + 9c)$ (आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन સૂત્રની રીતે)

પગલું 3 : પગલાં 1 તથા પગલાં 2માં મળેલા અવયવોનું પ્રથમ પદ સમાન હોય તેવા અવયવો એક સાથે લેવા.

(પ્રથમ પગલાંનો પ્રથમ અવયવ) (દ્વિતીય પગલાંનો પ્રથમ અવયવ) $\rightarrow$ (બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીનો પ્રથમ અવયવ)

અહીં બંને અવયવોમાંથી એક-સમાન પૈકીના એક પદનો લોપ થાય.

$(a + b)(a + c) \rightarrow (a + b + c)$

(પ્રથમ પગલાંનો દ્વિતીય અવયવ) (દ્વિતીય પગલાંનો દ્વિતીય અવયવ) $\rightarrow$ (બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીનો દ્વિતીય અવયવ)

અહીં બંને અવયવોમાંથી એક-સમાન પૈકીના એક પદનો લોપ થાય.

$(4a + 2b)(4a + 9c) \rightarrow (4a + 2b + 9c)$

$\therefore \quad 4a^2 + 2b^2 + 9c^2 + 6ab + 11bc + 13ca = (a + b + c)(4a + 2b + 9c)$

ઉદાહરણ 14 : અવયવ પાડો : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

પગલું 1 : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$c = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$= \quad a^2 + b^2 + 2ab$

$= \quad a^2 + 2ab + b^2$

$= \quad (a + b)(a + b)$ (विलोकनम् थी)

પગલું 2 : $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$b = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$= \quad a^2 + c^2 + 2ca$

$= \quad a^2 + 2ca + c^2$

$= \quad (a + c)(a + c)$ (विलोकनम् थी)

પગલું 3 : પગલાં 1 તથા પગલાં 2માં મળેલા અવયવોનું પ્રથમ પદ સમાન હોય તેવા અવયવો એક સાથે લેવા.

(પ્રથમ પગલાંનો પ્રથમ અવયવ) (દ્વિતીય પગલાંનો પ્રથમ અવયવ) $\rightarrow$ (બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીનો પ્રથમ અવયવ)

અહીં બંને અવયવોમાંથી એક-સમાન પૈકીના એક પદનો લોપ થાય.

$(a + b)(a + c) \rightarrow (a + b + c)$

(પ્રથમ પગલાંનો દ્વિતીય અવયવ) (દ્વિતીય પગલાંનો દ્વિતીય અવયવ) $\rightarrow$ (બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીનો દ્વિતીય અવયવ)

અહીં બંને અવયવોમાંથી એક-સમાન પૈકીના એક પદનો લોપ થાય.

$(a + b)(a + c) \rightarrow (a + b + c)$

આપેલ બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવ : $(a + b + c)(a + b + c)$

$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)(a + b + c)$

ઉદાહરણ 15 : અવયવ પાડો : $9a^2 + 10b^2 + 21c^2 + 21ab + 29bc + 30ca$

પગલું 1 : $9a^2 + 10b^2 + 21c^2 + 21ab + 29bc + 30ca$

$c = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$9a^2 + 21ab + 10b^2$

$= \quad 9a^2 + 15ab + 6ab + 10b^2$

$= \quad (3a + 2b)(3a + 5b)$ (आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन સૂત્રની રીતે)

પગલું 2 : $b = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$9a^2 + 30ca + 21c^2$

$= \quad 9a^2 + 9ca + 21ca + 21c^2$

$= \quad (9a + 21c)(a + c)$ (आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन સૂત્રની રીતે)

$= \quad 3(3a + 7c)(a + c)$

$= \quad (3a + 7c)(3a + 3c)$

$= \quad (3c + 3a)(7c + 3a)$

હવે અહીં પગલાં 1 અને પગલાં 2માં ચારેય અવયવોમાં $3a$ એ સમાન છે. આથી થોડી અસમંજસ સર્જાય છે. આ પ્રકારની બહુપદીઓના અવયવ પાડતી વખતે એક વધારાનું પગલું લેવું પડે છે. જેમાં $a = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ શોધવા પડે.

પગલું 3 : $a = 0$ લઈને મળતી બહુપદીના અવયવ મેળવો.

$10b^2 + 29bc + 21c^2$

$= \quad 10b^2 + 14bc + 15bc + 21c^2$

$= \quad (2b + 3c)(5b + 7c)$ (आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन સૂત્રની રીતે)

$= \quad (3c + 2b)(7c + 5b)$

પગલું 4 : પગલાં 3 તથા પગલાં 1 (અથવા પગલાં 2)માં દર્શાવેલા અવયવોનું પ્રથમ પદ સમાન હોય તેવા અવયવો એક સાથે લેવા.

અહીં પગલાં 3 તથા પગલાં 2ના સંદર્ભમાં ગણતરી દર્શાવી છે.

(દ્વિતીય પગલાંનો પ્રથમ અવયવ) (તૃતીય પગલાંનો પ્રથમ અવયવ) $\longrightarrow$ (બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીનો પ્રથમ અવયવ)

અહીં બંને અવયવોમાંથી એક-સમાન પૈકીના એક પદનો લોપ થાય છે.

$(3c + 3a)\,(3c + 2b) \longrightarrow (3c + 3a + 2b)$

(દ્વિતીય પગલાંનો દ્વિતીય અવયવ) (તૃતીય પગલાંનો દ્વિતીય અવયવ) $\longrightarrow$ (બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીનો દ્વિતીય અવયવ)

$(7c + 3a)\,(7c + 5b) \longrightarrow (7c + 3a + 5b)$

બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીના અવયવ : $(3c + 3a + 2b)(7c + 3a + 5b)$

$= (3a + 2b + 3c)(3a + 5b + 7c)$

$\therefore \quad 9a^2 + 10b^2 + 21c^2 + 21ab + 29bc + 30ca = (3a + 2b + 3c)(3a + 5b + 7c)$

મહાવરો : 4

નીચે આપેલી બહુચલ દ્વિઘાત બહુપદીઓના 'लोपनस्थापनाभ्याम्'ની રીતે અવયવ પાડો :

(1) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

(2) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(3) $16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$

(4) $9a^2 + 14b^2 + 21c^2 + 27ab + 35bc + 30ac$

(5) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

*

ગણિતના કેટલાંક ખ્યાલોની સમજૂતી :

1. 'विलोकनम्'થી $(x + 1)$ અવયવની ચકાસણી :

જો બહુપદીના બધા જ એકી સ્થાને રહેલાં પદોના સહગુણકનો સરવાળો એ બધા જ બેકી સ્થાને રહેલા પદોના સહગુણકના સરવાળા જેટલો થાય તો બહુપદીનો એક અવયવ $(x + 1)$ થાય.

2. 'विलोकनम्'થી $(x - 1)$ અવયવની ચકાસણી :

બહુપદીના બધા જ પદોના સહગુણકનો સરવાળો જો શૂન્ય થાય તો બહુપદીનો એક અવયવ $(x - 1)$ થાય.

મહાવરો : 5

નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ 'विलोकनम्'થી $(x + 1)$ અવયવની ચકાસણી તથા 'विलोकनम्'થી $(x + 1)$ અવયવની ચકાસણીના આધારે આપો :

(1) શું બહુપદી $x^3 + 4x^2 - 3x - 2$નો એક અવયવ $(x + 1)$ છે ?

(2) શું બહુપદી $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$નો એક અવયવ $(x - 1)$ છે ?

વૈદિક ગણિતના ભાગાકાર કરવા માટે ઉપયોગમાં લેવાયેલા સૂત્ર 'परावर्त्ययोजयेत्' દ્વારા ત્રિઘાત બહુપદીના અવયવો :

ઉદાહરણ 16 : અવયવ પાડો : $x^3 + 4x^2 - 3x - 2$

પગલું 1 : સહગુણકનો સરવાળો : $1 + 4 - 3 - 2 = 0$

આથી, આપેલ બહુપદીનો $(x - 1)$ એક અવયવ છે.

પગલું 2 : હવે, પરાવર્ત્યની મદદથી બહુપદીઓના ભાગાકાર (અધ્યાય-3)ની રીત પ્રમાણે ભાજક તરીકે $(x - 1)$ લઈને અવયવ મેળવો.

ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ	શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા +1	1 4 −3	−2
	1 5	+2
	1 5 2	0 → શેષ

ભાગફળ → $x^2 + 5x + 2$

અહીં મળેલ અવયવ $(x^2 + 5x + 2)$ છે.

આમ, ઉપરોક્ત બહુપદીના અવયવો $(x - 1)$ અને $(x^2 + 5x + 2)$ છે.

$\therefore \quad x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x^2 + 5x + 2)$

ઉદાહરણ 17 : અવયવ પાડો : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

પગલું 1 : સહગુણકનો સરવાળો : $1 - 23 + 142 - 120 = 0$

આથી, આપેલ બહુપદીનો $(x - 1)$ એક અવયવ છે.

પગલું 2 : હવે, પરાવર્ત્યની મદદથી બહુપદીઓના ભાગાકાર (અધ્યાય-3)ની રીત પ્રમાણે ભાજક તરીકે $(x - 1)$ લઈને અવયવ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ			શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	+1	1	–23	+142	–120
			+1	–22	+120
		1	–22	+120	0 → શેષ

ભાગફળ $\rightarrow x^2 - 22x + 120$

અહીં મળેલ અવયવ $(x^2 - 22x + 120)$ છે.

આમ, ઉપરોક્ત બહુપદીના અવયવો $(x - 1)$ અને $(x^2 - 22x + 120)$ છે.

$$\therefore \quad x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$$
$$= (x - 1)(x - 12)(x - 10)$$

ઉદાહરણ 18 : અવયવ પાડો : $x^3 + x^2 + x + 1$

પગલું 1 : એકી સ્થાને રહેલા પદોના સહગુણકોનો સરવાળો : $1 + 1 = 2$

બેકી સ્થાને રહેલા પદોના સહગુણકોનો સરવાળો : $1 + 1 = 2$

$\therefore$ $(x + 1)$ એ આપેલ બહુપદીનો એક અવયવ છે.

પગલું 2 : હવે, પરાવર્ત્યની મદદથી બહુપદીઓના ભાગાકાર (અધ્યાય-3)ની રીત પ્રમાણે ભાજક તરીકે $(x + 1)$ લઈને અવયવ મેળવો.

	ભાજક ખંડ	ભાજ્ય ખંડ			શેષ ખંડ
પરાવર્ત્ય સંખ્યા	–1	1	1	1	1
			–1	0	–1
		1	0	1	0 → શેષ

ભાગફળ $\rightarrow x^2 + 0x + 1$

અહીં મળેલ અવયવ $(x^2 + 0x + 1) = (x^2 + 1)$ છે.

આમ, ઉપરોક્ત બહુપદીના અવયવો $(x + 1)$ અને $(x^2 + 1)$ છે.

$\therefore \quad x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$

મહાવરો : 6

નીચે આપેલી ત્રિઘાત બહુપદીઓના 'परावर्त्य योजयेत्'ની રીતે અવયવ પાડો :

(1) $2x^3 + x^2 - 2x - 1$

(2) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(3) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$

(4) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

ઉત્તર

મહાવરો : 1

(1) $(x + 9)(x + 3)$

(2) $(x + 5)(x - 3)$

(3) $(x - 5)(x - 3)$

(4) $(m - 7)(m - 3)$

(5) $(x)(x - 3)(x - 3)$

મહાવરો : 2

(1) $(3x + 1)(2x + 5)$

(2) $(2x + 1)(x + 3)$

(3) $(4x - 1)(3x - 1)$

(4) $(3x - 2)(2x + 3)$

(5) $(x + 1)(3x - 4)$

મહાવરો : 3

(1) $(x + 3y)(x + 6y)$

(2) $(a + b)(4a + 9b)$

(3) $(a + b)(25a + 4b)$

(4) $3(3m + n)(m + 3n)$

(5) $(7a + 5b)(7a + 5b)$

મહાવરો : 4

(1) $(2x - y + z)(2x - y + z)$

(2) $(2x + 3y - 4z)(2x + 3y - 4z)$

(3) $(-4a + 2b + 3c)(-4a + 2b + 3c)$

(4) $(3a + 2b + 3c)(3a + 7b + 7c)$

(5) $(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)(-\sqrt{2}x + y + 2\sqrt{2}z)$

મહાવરો : 5

(1) ના, $(x + 1)$ એ $x^3 + 4x^2 - 3x - 2$નો એક અવયવ નથી.

(2) ના, $(x - 1)$ એ $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$નો એક અવયવ નથી.

મહાવરો : 6

(1) $(x - 1)(x + 1)(2x + 1)$

(2) $(x + 1)(x + 2)(x + 10)$

(3) $(y - 1)(2y + 1)(y + 1)$

(4) $(x + 1)(x + 1)(x - 5)$

5

શૂન્યં સામ્યસમુચ્ચયે સૂત્રથી સમીકરણનો ઉકેલ

G2S5U2

વૈદિક ગણિતમાં વિશિષ્ટ સ્વરૂપનાં સમીકરણોના ઉકેલ મેળવવા માટે એક વિશિષ્ટ ઉપયોગ થાય છે. આ સૂત્રથી લંબાણપૂર્વકના પગલાંઓની ગણતરીમાંથી મુક્તિ મળે છે અને ઝડપી તેમજ સરળ રીતે સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે. આ પ્રકરણમાં આવા વિશિષ્ટ સ્વરૂપનાં સમીકરણના ઉકેલ મેળવવાની રીત શીખીશું.

સૂત્ર : शून्यं साम्यसमुच्चये

साम्य = સમાન, समुच्चय = સમૂહ

અર્થ : જ્યારે સમૂહ સમાન છે ત્યારે સમૂહનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.

આ સૂત્ર સમજાવે છે કે ચોક્કસ પ્રકારના સમૂહ સમાન બને તો તે સમૂહની કિંમત શૂન્ય મળે છે, તેના ઉપરથી સમૂહમાં રહેલા ચલની કિંમત મળે છે, જે સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે.

આ સૂત્રની રીતે છ પ્રકારના 'સમાન સમૂહો' દ્વારા વિવિધ સ્વરૂપના સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય છે. પહેલાં આપેલા સમીકરણનું સ્વરૂપ જોઈને તેમાં રહેલા 'સમાન સમૂહો'ને ઓળખીને તેના દ્વારા સમીકરણનો ઉકેલ શોધી શકાય છે.

'સમાન સમૂહ'નો પ્રથમ અર્થ અને અનુપ્રયોગ

આપેલા સમીકરણના દરેક પદોમાં સામાન્ય અવયવ તરીકે કોઈ ચલ કે બહુપદી હોય તો તે ચલ કે બહુપદી 'સમાન સમૂહ' તરીકે ઓળખાય છે અને તેની કિંમત શૂન્ય થાય છે. જેમકે, $ax + bx = cx + dx$ સમીકરણ સ્વરૂપમાં ચલ x એ દરેક પદમાં રહેલો સામાન્ય અવયવ છે, માટે x ની કિંમત શૂન્ય થશે. સમીકરણ સ્વરૂપ $p(x - a) + q(x - a) = r(x - a) + s(x - a)$ માં બહુપદી $x - a$ એ દરેક પદમાં સામાન્ય અવયવ સ્વરૂપે રહેલી છે. તેથી $x - a$ ની કિંમત શૂન્ય થશે એટલે કે $x - a = 0$.

$\therefore \quad x = a$ એ સમીકરણનો ઉકેલ છે.

ઉદાહરણ 1 : સમીકરણનો ઉકેલ શોધો : $3x + 4x - 5x = 2x + 7x$

અહીં x એ દરેક પદનો સામાન્ય અવયવ છે.

$\therefore \quad x = 0$

ઉકેલ $= 0$

ઉદાહરણ 2 : $6x + \frac{x}{7} = \frac{4x}{5} - 10x$ નો ઉકેલ શોધો.

x એ દરેક પદનો સામાન્ય અવયવ છે.

$\therefore \quad x = 0$

ઉકેલ $= 0$

ઉદાહરણ 3 : $4(x-2)+3(x-2)=19(x-2)$ સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો.

અહીં દરેક પદમાં $x-2$ સામાન્ય અવયવ છે.

$\therefore \quad x-2=0$

$\therefore \quad x=2$

ઉકેલ $=2$

ઉદાહરણ 4 : $\frac{2(3x-4)}{3}+\frac{3x-4}{7}=\frac{5(3x-4)}{6}$

દરેક પદનો સામાન્ય અવયવ $3x-4$ છે. તે સમાન સમૂહ છે.

$\therefore \quad 3x-4=0$

$\therefore \quad 3x=4$

$\therefore \quad x=\frac{4}{3}$

ઉકેલ $=\frac{4}{3}$

ઉદાહરણ 5 : $2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{3}\left(2+\frac{1}{x}\right)+13\left(\frac{1}{x}+2\right)=11\left(2+\frac{1}{x}\right)-\frac{9}{5}\left(2+\frac{1}{x}\right)$નો ઉકેલ મેળવો.

સમાન સમૂહ $2+\frac{1}{x}=0$

$\therefore \quad \frac{1}{x}=-2$

$\therefore \quad x=\frac{-1}{2}$

ઉકેલ $=\frac{-1}{2}$

ઉદાહરણ 6 : ઉકેલ શોધો : $\frac{4x+5}{2}+3\left(\frac{4x+5}{2}\right)=\frac{5}{2}(4x+5)-7\left(\frac{4x+5}{2}\right)$

સમાન સમૂહ $\frac{4x+5}{2}=0$

$\therefore \quad 4x+5=0\times 2$

$\therefore \quad 4x+5=0$

$\therefore \quad 4x=-5$

$\therefore \quad x=\frac{-5}{4}$

ઉકેલ $=\frac{-5}{4}$

મહાવરો : 1

1. યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) $3a + 2a + a = 6a + 7a - 4a$ છે તો $a =$ ....

(A) 0 (B) 6 (C) 3 (D) 11

(2) $-6x + 5x - 3x = 9x - 2x$ નો ઉકેલ .... મળે.

(A) –4 (B) 7 (C) 0 (D) –7

(3) $2(x + 1) + 3(x + 1) = 4(x + 1) - 3(x + 1)$નો ઉકેલ .... મળે.

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) 2

(4) $\frac{3}{4}(x - 4) = 5(x - 4) + \frac{x-4}{4}$ માં $x =$ ....

(A) $\frac{-3}{4}$ (B) 0 (C) 4 (D) –4

(5) $2\left(x+\frac{1}{3}\right) - \left(x+\frac{1}{3}\right) = -4\left(x+\frac{1}{3}\right)$ છે તો xની કિંમત .... થશે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{2}{3}$

2. શૂન્યં સામ્યસમુચ્ચયે સૂત્રથી નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ શોધો :

(1) $3(2x - 3) + (2x - 3) = 4(2x - 3)$

(2) $\frac{1}{2}(5x + 7) = \frac{5x+7}{4} - \frac{3}{2}(5x + 7)$

(3) $\left(3-\frac{1}{y}\right) - 2\left(3-\frac{1}{y}\right) = \frac{2}{3}\left(3-\frac{1}{y}\right) + 7\left(3-\frac{1}{y}\right)$

(4) $2(x^2 - 9) + 3(x^2 - 9) = 4(x^2 - 9) - 1(x^2 - 9)$

(5) $4\left(\frac{5}{x}+1\right) - 3\left(\frac{5}{x}+1\right) = 2\left(\frac{5}{x}+1\right)$

'સમાન સમૂહ'નો દ્વિતીય અર્થ અને અનુપ્રયોગ

સમીકરણની બંને બાજુએ અવયવો સ્વરૂપે રહેલી બહુપદીના અચળ પદોનો ગુણાકાર સમાન હોય તો સમીકરણના ચલનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે. એટલે કે સમીકરણ $(x + a)(x + b) = (x + c)(x + d)$ માં $ab = cd$ થાય તો $x = 0$ થાય.

ઉદાહરણ 7 : $(x - 3)(x - 4)(x - 1) = (x - 6)(x + 2)$નો ઉકેલ શોધો.

ડાબી બાજુના અચળ પદોનો ગુણાકાર $= (-3)(-4)(-1)$

$= -12$ ...(i)

જમણી બાજુના અચળ પદોનો ગુણાકાર $= (-6)(2)$

$= -12$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) સમાન છે.

$\therefore \quad x = 0$

ઉકેલ = 0

જો $(x + a)(x + b) + p = (x + c)(x + d) + q$ સ્વરૂપનું સમીકરણ હોય અને $(a)(b) + p = (c)(d) + q$ થાય તો $x = 0$ થાય. એટલે કે, જો સમીકરણમાં સ્વતંત્ર અચળ પદ સરવાળા કે બાદબાકીના સ્વરૂપે હોય તો અવયવોના અચળ પદોના ગુણાકારમાં સ્વતંત્ર અચળ પદોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ 8 : $(x - 1)(x + 7) + 3 = (x - 9)(x + 1) + 5$નો ઉકેલ મેળવો.

ડાબી બાજુના અચળ પદોનું સાદું રૂપ $= (-1)(7) + 3$

$= -7 + 3$

$= -4$ ...(i)

જમણી બાજુના અચળ પદોનું સાદું રૂપ $= (-9)(1) + 5$

$= -9 + 5$

$= -4$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) સમાન છે.

$\therefore \quad x = 0$

ઉકેલ = 0

ઉદાહરણ 9 : $8(3x + 4) = (x - 2)(x - 4)(x + 4)$ સમીકરણનો ઉકેલ શૂન્ય છે કે નહિ તે ચકાસો.

અહીં સમીકરણની ડાબી બાજુ $= 8(3x + 4)$

$= 24x + 32$

$\therefore$ ડાબી બાજુના અચળ પદોનો ગુણાકાર = 32 ...(i)

જમણી બાજુના અચળ પદોનો ગુણાકાર $= (-2)(-4)(4)$

$= 32$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી $x = 0$ છે.

$\therefore$ ઉકેલ = 0

મહાવરો : 2

નીચેનાં સમીકરણોના ઉકેલ શૂન્ય છે કે નહિ તે ચકાસો :

(1) $(x + 3)(x + 4)(x + 1) = (x - 2)(x - 6)$

(2) $(y - 9)(y + 14) = (y + 8)(y - 2)(y + 2)$

(3) $(A - 1)(A + 11) + 5 = (A - 4)(A + 4)$

(4) $(x - 3)(x + 7) + 15 = (x + 5)(x - 4) + 14$

(5) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 8\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2$

'સમાન સમૂહ'નો તૃતીય અર્થ અને અનુપ્રયોગ

આપણે જાણીએ છીએ કે જે બે સંખ્યાનો સરવાળો શૂન્ય થાય તે બે સંખ્યાઓ પરસ્પર વિરોધી સંખ્યાઓ છે તેમ સમાન અંશ ધરાવતા અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો શૂન્ય થાય તો છેદમાં રહેલી બહુપદીઓનો સરવાળો સમાન સમૂહ બને અને તેનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય એટલે કે $\frac{A}{ax+b} + \frac{A}{cx+d} = 0$ માં અંશ સમાન છે. માટે છેદમાં રહેલી બહુપદીઓ $ax + b$ અને $cx + d$ નો સરવાળો શૂન્ય થશે.

$$\frac{A}{ax+b} + \frac{A}{cx+d} = 0$$

$\therefore \quad (ax + b) + (cx + d) = 0$

$\therefore \quad ax + b + cx + d = 0$

$\therefore \quad ax + cx + b + d = 0$

$\therefore \quad x(a + c) + b + d = 0$

$\therefore \quad x(a + c) = -b - d$

$\therefore \quad x = \frac{-b-d}{a+c}$

ઉદાહરણ 10 : ઉકેલ મેળવો : $\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{5x-6} = 0$

અહીં બંને પદોના અંશ સમાન છે.

$\therefore$ છેદનો સરવાળો $= 0$

$\therefore \quad 2x - 1 + 5x - 6 = 0$

$\therefore \quad 2x + 5x - 1 - 6 = 0$

$\therefore \quad 7x - 7 = 0$

$\therefore \quad 7x = 7$

$\therefore \quad x = \frac{7}{7}$

$\therefore \quad x = 1$

$\therefore$ ઉકેલ $= 1$

ઉદાહરણ 11 : ઉકેલ શોધો : $\frac{-5}{5(3x+6)} + \frac{-5}{6(2x+4)} = 0$

$\therefore$ છેદનો સરવાળો $= 0$

$\therefore \quad 5(3x + 6) + 6(2x + 4) = 0$

$\therefore \quad 15x + 30 + 12x + 24 = 0$

$\therefore \quad 27x + 54 = 0$

$\therefore \quad 27x = -54$

$\therefore \quad x = \frac{-54}{27}$

$\therefore \quad x = -2$

$\therefore$ ઉકેલ $= -2$ છે.

મહાવરો : 3

નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો :

(1) $\frac{3B}{x+4} + \frac{3B}{2x+5} = 0$

(2) $\frac{1}{4x+6} + \frac{1}{3x+1} = 0$

(3) $\frac{P}{2(3x+1)} + \frac{P}{7x+5} = 0$

(4) $\frac{41}{2(13y-11)} + \frac{41}{3(-9y+7)} = 0$

(5) $\frac{1}{\left(\frac{x}{2}+2\right)} + \frac{1}{\left(\frac{x}{2}-5\right)} = 0$

જે બે સંખ્યાઓનો તફાવત શૂન્ય થાય તે બે સંખ્યાઓ સમાન છે તેમ સમાન અંશવાળા અપૂર્ણાંકોનો તફાવત શૂન્ય થાય તો તેમના છેદનો તફાવત પણ શૂન્ય થાય.

$\frac{A}{ax+b} - \frac{A}{cx+d} = 0$ હોય, તો $(ax + b) - (cx + d) = 0$ થાય.

આ છેદમાં રહેલી બહુપદીઓનો તફાવત એ સમાન સમૂહ બનશે અને તેનું મૂલ્ય શૂન્ય થશે.

$\frac{A}{ax+b} - \frac{A}{cx+d} = 0$

$\therefore \quad (ax + b) - (cx + d) = 0$

$\therefore \quad ax + b - cx - d = 0$

$\therefore \quad ax - cx + b - d = 0$

$\therefore \quad x(a - c) + b - d = 0$

$\therefore \quad x(a - c) = -b + d$

$\therefore \quad x = \frac{-b+d}{a-c}$

ઉદાહરણ 12 : ઉકેલ મેળવો : $\frac{4}{2x+6} - \frac{4}{x+8} = 0$

અહીં બંને અંશ સમાન છે.

$\therefore$ છેદનો સરવાળો $= 0$

$\therefore \quad (2x + 6) - (x + 8) = 0$

$\therefore \quad 2x + 6 - x - 8 = 0$

$\therefore \quad x - 2 = 0$

$\therefore \quad x = 2$

$\therefore$ ઉકેલ $= 2$

ઉદાહરણ 13 : $\frac{11}{3(3a-8)} + \frac{11}{5(2a+1)} = 0$

$\therefore \quad 3(3a - 8) - 5(2a + 1) = 0$

$\therefore \quad 9a - 24 - 10a - 5 = 0$

$\therefore \quad 9a - 10a - 24 - 5 = 0$

$\therefore \quad -a - 29 = 0$

$\therefore \quad -a = 29$

$\therefore \quad a = -29$

$\therefore$ ઉકેલ $= -29$ છે.

મહાવરો : 4

નીચેનાં સમીકરણોનો ઉકેલ મેળવો :

(1) $\frac{5}{3x-1} - \frac{5}{7x-5} = 0$

(2) $\frac{7A}{-8y-7} - \frac{7A}{2(5y+4)} = 0$

(3) $\frac{B}{6(2x+4)} - \frac{B}{5(3x+6)} = 0$

(4) $\frac{1}{2(4x^2-5)} - \frac{1}{7x^2-9} = 0$

(5) $\frac{P}{\frac{4x}{3}-1} - \frac{P}{\frac{2x}{3}+5} = 0$

'સમાન સમૂહ'નો ચતુર્થ અર્થ અને અનુપ્રયોગ

$\frac{ax+b}{ax+c} = \frac{ax+c}{ax+b}$ [જ્યાં $b \neq c$] સ્વરૂપના સમીકરણમાં

ડાબી બાજુનો અંશ એ જમણી બાજુનો છેદ છે જ્યારે જમણી બાજુનો અંશ એ ડાબી બાજુનો છેદ છે. આ સમીકરણના બંને અંશનો સરવાળો અને બંને છેદનો સરવાળો સમાન થશે માટે તે સરવાળો સમાન સમૂહ બનશે અને તેનું મૂલ્ય શૂન્ય મૂકીને સમીકરણનો ઉકેલ મળશે.

અંશનો સરવાળો $= (ax + b) + (ax + c)$

$= ax + b + ax + c$

$= 2ax + b + c$ ...(i)

છેદનો સરવાળો $= (ax + c) + (ax + b)$

$= ax + c + ax + b$

$= 2ax + b + c$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) સમાન છે, માટે તે સમાન સમૂહ બને છે.

$\therefore \quad 2ax + b + c = 0$ થાય. [જ્યાં $b \neq c$]

$\therefore \quad 2ax = -b - c$

$\therefore \quad x = \frac{-b-c}{2a}$ ઉકેલ મળે.

આ સ્વરૂપના સમીકરણમાં અંશ અથવા છેદનો સરવાળો શૂન્ય લઈ ઉકેલ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 14 : ઉકેલ શોધો : $\frac{x+3}{x-4} = \frac{x-4}{x+3}$

અહીં અંશનો સરવાળો $= x + 3 + x - 4 = 0$

$\therefore \quad 2x - 1 = 0$

$\therefore \quad 2x = 1$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ઉકેલ $= \frac{1}{2}$

ઉદાહરણ 15 : ઉકેલ શોધો : $\frac{2x-7}{2x-9} = \frac{2x-9}{2x-7}$

અહીં અંશનો સરવાળો $= (2x - 7) + (2x - 9) = 0$

$\therefore \quad 2x - 7 + 2x - 9 = 0$

$\therefore \quad 4x - 16 = 0$

$\therefore \quad 4x = 16$

$\therefore \quad x = \frac{16}{4}$

$\therefore \quad x = 4$

$\therefore$ ઉકેલ $= 4$

ઉદાહરણ 16 : ઉકેલ શોધો : $\frac{\frac{x}{2}+1}{\frac{x}{2}+2} = \frac{\frac{x}{2}+2}{\frac{x}{2}+1}$

અંશનો સરવાળો $= \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2} + 2 = 0$

$\therefore \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 + 2 = 0$

$\therefore \frac{2x}{2} + 3 = 0$

$\therefore \quad x + 3 = 0$

$\therefore \quad x = -3$

$\therefore$ ઉકેલ $= -3$

મહાવરો : 5

સમીકરણોનો ઉકેલ શોધો :

(1) $\dfrac{3x+5}{3x-4} = \dfrac{3x-4}{3x+5}$

(2) $\dfrac{29x-5}{37x-6} = \dfrac{37x-6}{29x-5}$

(3) $\dfrac{x^2-25}{x^2-7} = \dfrac{x^2-7}{x^2-25}$

(4) $\dfrac{\frac{x}{3}+3}{\frac{x}{3}-1} = \dfrac{\frac{x}{3}-1}{\frac{x}{3}+3}$

*

સમાન સમૂહનો પાંચમો અર્થ એ અનુપ્રયોગ એ દ્વિઘાત ત્રિપદી સમીકરણનો ઉકેલ આપે છે. આ પ્રકારના સમીકરણના ઉકેલની રીત આપણે ધોરણ 10માં શીખીશું.

સમાન સમૂહનો છટ્ઠો અર્થ અને અનુપ્રયોગ

$\dfrac{A}{x+a} + \dfrac{A}{x+b} = \dfrac{A}{x+c} + \dfrac{A}{x+d}$ સ્વરૂપના સમીકરણમાં અંશ સમાન છે. આવા સમાન અંશવાળા સમીકરણમાં ડાબી બાજુના છેદનો સરવાળો અને જમણી બાજુના છેદનો સરવાળો જો સમાન બને તો તે સરવાળો સમાન સમૂહ બને છે ને તેનું મૂલ્ય શૂન્ય ગણીને સમીકરણનો ઉકેલ મળે છે. ઉપરના સમીકરણમાં $a + b = c + d$ થાય, તો $x + a + x + b = x + c + x + d$ થાય.

ઉદાહરણ 17 : ઉકેલ મેળવો : $\dfrac{10}{x+7} + \dfrac{10}{x+9} = \dfrac{10}{x+6} + \dfrac{10}{x+10}$

અહીં અંશ સમાન છે.

$\therefore$ ડાબી બાજુના છેદનો સરવાળો $= x + 7 + x + 9$

$= 2x + 16$ ...(i)

જમણી બાજુના છેદનો સરવાળો $= x + 6 + x + 10$

$= 2x + 16$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) સમાન છે.

$\therefore$ $2x + 16 = 0$

$\therefore$ $2x = -16$

$\therefore$ $x = \dfrac{-16}{2}$

$\therefore$ $x = -8$

$\therefore$ ઉકેલ $= -8$

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો : $\frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{x-12} - \frac{1}{x-9}$

અહીં અંશ સમાન છે, પરંતુ છેદનો સરવાળો સમાન નથી થતો, પરંતુ ઝીણવટભરી નજરે જોવાથી ખ્યાલ આવે છે કે બે પદોનું પક્ષાંતરણ કરવાથી છેદનો સરવાળો સમાન બને છે. માટે પદો $\frac{1}{x-5}$ અને $\frac{1}{x-9}$ નું પક્ષાંતરણ કરતાં સમીકરણ નીચેના સ્વરૂપમાં મળશે.

$$\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x-12} + \frac{1}{x-5}$$

હવે, ડાબી બાજુના છેદનો સરવાળો $= x - 8 + x - 9$

$= 2x - 17$ ...(i)

જમણી બાજુના છેદનો સરવાળો $= x - 12 + x - 5$

$= 2x - 17$ ...(ii)

પરિણામ (i) અને (ii) સમાન છે.

$\therefore \quad 2x - 17 = 0$

$\therefore \quad 2x = 17$

$\therefore \quad x = \frac{17}{2}$

$\therefore$ ઉકેલ $= \frac{17}{2}$

મહાવરો : 6

સમીકરણોનો ઉકેલ શોધો :

(1) $\frac{1}{x-7} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x+11} + \frac{1}{x-9}$

(2) $\frac{2A}{B-10} + \frac{2A}{B-16} = \frac{2A}{B+1} + \frac{2A}{B-27}$

(3) $\frac{7}{y-3} - \frac{7}{y+15} = \frac{7}{y-5} - \frac{7}{y+13}$

(4) $\frac{-13}{a^2-1} - \frac{-13}{a^2-7} = \frac{-13}{a^2-11} - \frac{-13}{a^2-17}$

ઉત્તર

મહાવરો : 1

1.	(1) 0	(2) 0	(3) –1	(4) 4	(5) $-\frac{1}{3}$
2.	(1) $\frac{3}{2}$	(2) $\frac{-7}{5}$	(3) $\frac{1}{3}$	(4) 3, –3	(5) –5

મહાવરો : 2

(1) છે	(2) નથી	(3) નથી	(4) છે	(5) નથી

મહાવરો : 3

(1) –3	(2) –1	(3) $-\frac{7}{13}$	(4) –1	(5) 3

મહાવરો : 4

(1) 1	(2) $\frac{-5}{6}$	(3) –2	(4) 1, –1	(5) 9

મહાવરો : 5

(1) $\frac{-1}{6}$	(2) $\frac{1}{6}$	(3) 4, –4	(4) –3

મહાવરો : 6

(1) –1	(2) 13	(3) –5	(4) 3, –3

6

ત્રણ એકચલ દ્વિપદીનો ગુણાકાર

U7E9D1

ધોરણ 8માં આપણે બે એકચલ બહુપદીઓના ગુણાકાર કરતાં શીખ્યા છીએ. આ પ્રકરણમાં આપણે વૈદિક ગણિતની રીતે ત્રણ એકચલ દ્વિપદીના ગુણાકાર કરતાં શીખીશું.

વૈદિક ગણિતના ઉર્ધ્વતિર્યગ્ભ્યામ્ સૂત્રની મદદથી માત્ર સહગુણકોના ઊભા અને ત્રાંસા ગુણાકાર અને સરવાળા કરવાથી સરળતાથી ત્રણ એકચલ દ્વિપદીનો ગુણાકાર (વિસ્તરણ) કરી શકાય છે.

સૂત્ર : ઉર્ધ્વતિર્યગ્ભ્યામ્

ઉર્ધ્વ = ઊભા, તિર્યક્ = ત્રાંસા

અર્થ : ઊભા અને ત્રાંસા દ્વારા

$ax + b$, $mx + n$ અને $px + q$ એ ત્રણ એકચલ દ્વિપદી છે. જેમાં

$ax + b$ માં x^1 નો સહગુણક a અને x^0 નો સહગુણક b છે.

$mx + n$ માં x^1 નો સહગુણક m અને x^0 નો સહગુણક n છે.

$px + q$ માં x^1 નો સહગુણક p અને x^0 નો સહગુણક q છે.

ત્રણ એકચલ દ્વિપદીનો ગુણાકાર $= (ax + b)(mx + n)(px + q)$ છે. પ્રચલિત પદ્ધતિમાં આ ગુણાકાર કરતી વખતે પહેલા બે દ્વિપદીનો ગુણાકાર કરવામાં આવે છે અને તેના ગુણનફળ સ્વરૂપે જે બહુપદી મળે તેનો ત્રીજી દ્વિપદી સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે છે.

પ્રચલિત પદ્ધતિથી ત્રણ એકચલ દ્વિપદીનો ગુણાકાર $(ax + b)(mx + n)(px + q)$

$(ax + b)(mx + n) = ax(mx + n) + b(mx + n)$

$= amx^2 + anx + bmx + bn$

હવે, $(px + q)(amx^2 + anx + bmx + bn)$

$= px(amx^2 + anx + bmx + bn) + q(amx^2 + anx + bmx + bn)$

$= pamx^3 + panx^2 + pbmx^2 + pxbn + qamx^3 + qanx + qbmx + qbn$

$= ampx^3 + panx^2 + pbmx^2 + qamx^2 + pxbn + qanx + qbmx + qbn$

$= ampx^3 + x^2(pan + pbm + qam) + x(pbn + qan + qbm) + qbn$

$= ampx^3 + (amq + mpb + pan)x^2 + (bnp + nqa + qbm)x + bnq$

આ રીતે ત્રણ દ્વિપદીનો ગુણાકાર કરતાં x^3, x^2, x^1 અને x^0 ના સહગુણકો મળશે.

x^3 નો સહગુણક $= amp$

x^2 નો સહગુણક $= amq + mpb + pan$

x^1 નો સહગુણક $= bnp + nqa + qbm$

x^0 નો સહગુણક (અચળપદ) $= bnp$

હવે આપણે વૈદિક ગણિતના સૂત્ર ઉર્ધ્વતિર્યગ્ભ્યામ્‌ની રીતે ત્રણ એકચલ દ્વિપદીનો ગુણાકાર માત્ર સહગુણકોના ઉપયોગથી કરીશું અને x^3, x^2, x^1 ના સહગુણકો અને x^0 (અચળપદ) મેળવીશું.

$(ax + b)(mx + n)(px + q)$

બહુપદીના સહગુણકો

a b પ્રથમ બહુપદીમાં સહગુણકો

m n બીજી બહુપદીમાં સહગુણકો

p q ત્રીજી બહુપદીમાં સહગુણકો

a b પ્રથમ બહુપદીમાં સહગુણકો

m n બીજી બહુપદીમાં સહગુણકો

પગલું 1 : પ્રથમ પદમાં x^3નો સહગુણક

$$\begin{array}{lcc} & a & b \\ & m & n \\ amp \leftarrow & p & q \\ & a & b \\ & m & n \end{array}$$

$\therefore$ x^3 નો સહગુણક amp થાય.

પગલું 2 : બીજા પદમાં x^2નો સહગુણક

$$\begin{array}{ccl} a & b & \\ m & n & \\ p & q & \rightarrow amq \\ & & + \\ a & b & \rightarrow mpb \\ & & + \\ m & n & \rightarrow pan \end{array}$$

$\therefore$ x^2 નો સહગુણક $amq + mpb + pan$ થાય.

પગલું 3 : ત્રીજા પદમાં xનો સહગુણક

$$\begin{array}{lcc} & a & b \\ & m & n \\ bnp \leftarrow & p & q \\ + & & \\ nqa \leftarrow & a & b \\ + & & \\ qbm \leftarrow & m & n \end{array}$$

$\therefore$ x નો સહગુણક $bnp + nqa + qbm$ થાય.

પગલું 4 : ચોથું પદ x^0નો સહગુણક (અચળ પદ)

$$\begin{array}{ccl} a & b & \\ m & n & \\ p & q & \rightarrow bnq \\ a & b & \\ m & n & \end{array}$$

$\therefore$ x^0 નો સહગુણક (અચળ પદ) bnq થાય.

આવી રીતે,

$$= (ax + b)(mx + n)(px + q)$$

$$= (amp)\,x^3 + (amq + mpb + pan)\,x^2 + (bnp + nqa + qbm)\,x + bnq$$

ઉદાહરણ 1 : $(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3)$નો ગુણાકાર કરો.

એકચલ દ્વિપદીઓના સહગુણકો

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

પગલું 1 : પ્રથમ પદમાં x^3નો સહગુણક

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \\ 1 \times 1 \times 1 \leftarrow & 1 & 3 \\ = 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 \end{array}$$

$\therefore$ x^3 નો સહગુણક 1 થાય.

પગલું 2 : બીજા પદમાં x^2નો સહગુણક

$$\begin{array}{ccl} 1 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 3 & \rightarrow 1 \times 1 \times 3 = 3 \\ & & \qquad\qquad\quad + \\ 1 & 1 & \rightarrow 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ & & \qquad\qquad\quad + \\ 1 & 2 & \rightarrow 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{array}$$

$\therefore$ x^2 નો સહગુણક $3 + 1 + 2 = 6$ થાય.

પગલું 3 : ત્રીજા પદમાં xનો સહગુણક

	1	1
	1	2
	1	3
$1 \times 2 \times 1 = 2$		
+	1	1
$2 \times 3 \times 1 = 6$		
+	1	2
$3 \times 1 \times 1 = 3$		

$\therefore$ x નો સહગુણક $2 + 6 + 3 = 11$ થાય.

પગલું 4 : ચોથું પદ x^0નો સહગુણક (અચળ પદ)

1	1
1	2
1	3
1	1
1	2

$\rightarrow 1 \times 2 \times 3 = 6$

$\therefore$ x^0 નો સહગુણક (અચળ પદ) 6 થાય.

આવી રીતે,

$(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ થાય.

ઉદાહરણ 2 : $(2x - 1)(3x + 1)(x - 4)$નો ગુણાકાર કરો.

એકચલ દ્વિપદીઓના સહગુણકો

2	–1
3	1
1	–4
2	–1
3	1

પગલું 1 : પ્રથમ પદમાં x^3નો સહગુણક

	2	–1
	3	1
$2 \times 3 \times 1 \leftarrow$	1	–4
$= 6$	2	–1
	3	1

$\therefore$ x^3 નો સહગુણક 6 થાય.

પગલું 2 : બીજા પદમાં x^2નો સહગુણક

2	–1	
3	1	
1	–4	$2 \times 3 \times (-4) = -24$
2	–1	+
		$3 \times 1 \times (-1) = -3$
3	1	+
		$1 \times 2 \times 1 = 2$

$\therefore$ x^2 નો સહગુણક $(-24) + (-3) + 2 = -25$ થાય.

પગલું 3 : ત્રીજા પદમાં xનો સહગુણક

	2	–1
	3	1
$(-1) \times 1 \times 1 = (-1)$	1	–4
+	2	–1
$1 \times (-4) \times 2 = (-8)$		
+	3	1
$(-4) \times (-1) \times 3 = 12$		

$\therefore$ x નો સહગુણક $(-1) + (-8) + 12 = 3$ થાય.

પગલું 4 : ચોથું પદ x^0નો સહગુણક (અચળ પદ)

2	–1	
3	1	
1	–4	$(-1) \times 1 \times (-4) = 4$
2	–1	
3	1	

$\therefore$ x^0 નો સહગુણક (અચળ પદ) 4 થાય.

આવી રીતે, $(2x - 1)(3x + 1)(x - 4) = 6x^3 - 25x^2 + 3x + 4$ થાય.

ઉદાહરણ 3 : $(8x - 2)(x + 1)(2x + 3)$નો ગુણાકાર કરો.

એકચલ દ્વિપદીઓના સહગુણકો

8	–2
1	1
2	3
8	–2
1	1

પગલું 1 : પ્રથમ પદમાં x^3નો સહગુણક

$$\begin{array}{cc} 8 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 8 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$8 \times 1 \times 2$

$= 16$

$\therefore$ x^3 નો સહગુણક 16 થાય.

પગલું 2 : બીજા પદમાં x^2નો સહગુણક

$$\begin{array}{cc} 8 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 8 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$8 \times 1 \times 3 = 24$

$+$

$1 \times 2 \times (-2) = (-4)$

$+$

$2 \times 8 \times 1 = 16$

$\therefore$ x^2 નો સહગુણક $24 + (-4) + 16 = 36$ થાય.

પગલું 3 : ત્રીજા પદમાં xનો સહગુણક

$$\begin{array}{cc} 8 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 8 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$(-2) \times 1 \times 2 = (-4)$

$1 \times 3 \times 8 = 24$

$3 \times (-2) \times 1 = (-6)$

$\therefore$ x નો સહગુણક $(-4) + 24 + (-6) = 14$ થાય.

પગલું 4 : ચોથું પદ x^0નો સહગુણક (અચળ પદ)

$$\begin{array}{cc} 8 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 8 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$(-2) \times 1 \times 3 = (-6)$

$\therefore$ x^0 નો સહગુણક (અચળ પદ) (-6) થાય.

આવી રીતે, $(8x - 2)(x + 1)(2x + 3) = 16x^3 + 36x^2 + 14x - 6$ થાય.

મહાવરો

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(1) $(6x + 1)(3x - 2)(x - 3)$ ના ગુણાકારમાં x^3 નો સહગુણક .... છે.

(2) $(5x + 3)(9x - 1)(7x + 10)$ ના વિસ્તરણમાં અચળપદ .... છે.

(3) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ ના ગુણાકારમાં x^2 નો સહગુણક .... છે.

(4) $(2x + 1)(x + 2)(x + 1)$ ના વિસ્તરણમાં x નો સહગુણક .... છે.

2. નીચેની દ્વિપદીઓનો ગુણાકાર કરો :

(1) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

(2) $(x + 2)(x - 3)(2x + 1)$

(3) $(3x - 1)(2x + 1)(3x + 1)$

(4) $(2x + 3)(x - 1)(4x + 5)$

(5) $(3x + 5)(4x + 1)(2x + 3)$

ઉત્તર

1. (1) 18 (2) –30 (3) 2 (4) 7

2. (1) $x^3 - 7x + 6$ (2) $2x^3 - x^2 - 13x - 6$

(3) $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ (4) $8x^3 + 14x^2 - 7x - 15$

(5) $24x^3 + 82x^2 + 79x + 15$

7

સાંકેતિક ભાષા

N8B6V5

અંકોનો ઉપયોગ વિવિધ પ્રકારની સંખ્યાઓ દર્શાવવા માટે થાય છે. વૈદિક ગણિતમાં એક પદ્ધતિ એવી છે કે જે અંકોને અક્ષરોમાં દર્શાવે છે અને સંખ્યાને શબ્દ કે વાક્યમાં દર્શાવે છે. એટલે કે કોઈ એક સંખ્યા એ શબ્દનો સંકેત કરે છે અને શબ્દ એ સંખ્યાનો સંકેત કરે છે. આ બાબતને 'સાંકેતિક ભાષા' કહી શકાય.

અંકોને અક્ષરના સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરવામાં આવે ત્યારે તેને કૂટાંક કહે છે. અંકોને અક્ષરોમાં અને અક્ષરોને અંકોમાં પરિવર્તિત કરતી આ પદ્ધતિ વ્યંજનાંક પદ્ધતિ છે.

ઘર નંબર, ફોન નંબર, આધાર કાર્ડ, પાન કાર્ડ, ચૂંટણી કાર્ડ, ક્રેડિટ કાર્ડ, ATM PIN વગેરેના અનેક પ્રકારના નંબરો યાદ રાખવા મુશ્કેલ છે. આ નંબરને વ્યંજનાંક પદ્ધતિથી શબ્દો કે વાક્યોમાં રૂપાંતરિત કરીને યાદ રાખવા સરળ બને છે. આ ઉપરાંત ગુપ્ત રીતે કોઈ સંખ્યા જણાવવી હોય તો શબ્દના સ્વરૂપે કહી શકાય છે અને શબ્દ કે વાક્ય કહેવું હોય તો તે સંખ્યા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય છે. આ વ્યંજનાંક પદ્ધતિને એક પ્રકારની કોડિંગ પદ્ધતિ પણ કહી શકાય.

કેટલીક ગોપનીય બાબતોને અન્ય કોઈ જાણી ન જાય, ચોરી ન જાય કે તેનો ગેરલાભ ન લઈ જાય તે માટે સાંકેતિક ભાષાનો ઉપયોગ થયેલો જોવા મળે છે. અંકગણિતને ભાષા સાથે સાંકળી કેટલાંક રહસ્યો સરળતાથી સાચવી શકાય, સમજાવી શકાય અને સંગ્રહ કરી શકાય એ હેતુથી વિવિધ પદ્ધતિઓ પૈકી વ્યંજનાંક પદ્ધતિ અમલમાં આવી હશે એમ કહી શકાય. આ પદ્ધતિ 'કટપયાદિ' તરીકે જાણીતી બની છે. સૌપ્રથમ તેની સમજ મેળવી પછી તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકાય તેની ચર્ચા કરીશું.

વ્યંજનાંક પદ્ધતિ માટેનું સૂત્ર આ મુજબ છે : **"कादि नव टादि नव, पादि पंचक याद्यष्टक तथा क्षः शून्यम्।"**

આ સૂત્રનો ભાવાર્થ છે કે 'ક'થી પ્રારંભ કરીને નવ (9) અક્ષરો સુધી, 'ટ'થી પ્રારંભ કરીને નવ (9) અક્ષરો સુધી, 'પ'થી શરૂ કરી પાંચ (5) અક્ષરો સુધી, 'ય'થી શરૂ કરી આઠ (8) અક્ષરો સુધી ક્રમાનુસાર અંકોને વ્યક્ત કરવામાં આવે છે. 'ક્ષ' એ શૂન્ય દર્શાવે છે.

ક્રમાંક	અનુરૂપ મૂળાક્ષર			
	ક-વર્ગ	ટ-વર્ગ	પ-વર્ગ	ય-વર્ગ
1	ક	ટ	પ	ય
2	ખ	ઠ	ફ	ર
3	ગ	ડ	બ	લ, ળ
4	ઘ	ઢ	ભ	વ
5	ઙ	ણ	મ	શ
6	ચ	ત		ષ
7	છ	થ		સ
8	જ	દ		હ
9	ઝ	ધ		
0				ક્ષ

'જ્ઞ' વર્ણ 'જ્' તથા 'ઞ' વર્ણના સંયોગથી બને છે અને 'ઞ' વર્ણ વ્યાકરણમાં 'ચ' વર્ગનો પાંચમો વર્ણ છે તથા 'ન' વર્ણ વ્યાકરણમાં 'ત' વર્ગનો પાંચમો વર્ણ છે તેથી 'ચ' અને 'ત' વર્ગથી પાંચમો વર્ણ ગણતાં 'ઞ' અને 'ન' ઉપરોક્ત કોષ્ટકમાં '0'ના સ્થાનમાં આવશે માટે આપણે 'જ્ઞ' અને 'ન' વર્ણ માટે '0' લઈશું.

ગુજરાતી વર્ણમાલા મુજબ 'લ' અને 'ળ'નો પ્રયોગ સમાન છે. માટે 'લ' એ 'ળ' અક્ષરનો અંક 3 થશે.

નિયમ 1 : આ વ્યંજનાંક પદ્ધતિ છે, જેમાં સ્વતંત્ર સ્વર અ, આ, ઇ, ઈ, ઉ, ઊ વગેરેનો ઉપયોગ થતો નથી.

નિયમ 2 : જોડાયેલા સ્વર ગણતરીમાં લેવાશે નહિ. એ મુજબ ર, રા, રે, રો, રૂ બધા સમાન ગણાશે. દા.ત., રમ, રામ, રેમ, રોમ, કે રૂમ – દરેક માટે 25 થશે. 'ગરમ', 'ડરણ', 'ગરમી', 'ગરમું' માટે 325 થશે. 'કંપાય', 'કપટી', 'ટપક', 'ટપકું', 'ટીપકી' માટે 111 થશે.

નિયમ 3 : અર્ધ મૂળાક્ષરને છોડી દઈ તેની સાથે જોડાયેલ પૂર્ણ મૂળાક્ષરને ગણતરીમાં લેવાશે. જેમકે, 'વ્ય' લખીએ તો અડધા 'વ'ને ધ્યાનમાં લેવામાં આવશે નહિ અને 'ય' સાથે 1 જોડાતો હોઈ 'વ્ય' માટે 1 જ દર્શાવાશે. સ્પષ્ટ કહી શકાય કે 'ફાવ્યો' લખ્યું હોય તો 21 થશે.

'ભાગ્ય'માં પણ 'ભા' એટલે 'ભ' ધ્યાન પર લઈ તેની સાથે જોડાયેલ સ્વર 'આ' અવગણતાં 'ભ' માટેનો પૂર્ણાંક 4 થશે. અને 'ગ્ય'માં અડધા મૂળાક્ષર 'ગ'ને અવગણી 'ય' માટેનો અંક 1 મળશે. માટે 'ભાગ્ય' શબ્દ માટે સંખ્યા 41 થશે.

આ પ્રમાણે 'મધુવ્રાત'માં 'મ' માટે 5, ધુ માં 'ધ' માટે 9, 'વ્રા'માં અડધા 'વ'ને અવગણતાં જોડાયેલા પૂર્ણ મૂળાક્ષર 'ર' માટે 2 લેતાં, 'વ્રા' એટલે 2 અને છેલ્લે 'ત' એટલે 6 લેવાશે. આમ, મધુવ્રાત એટલે 5926 થશે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેના શબ્દોને સંખ્યામાં રૂપાંતરિત કરો.

(1) હાટ
(2) સુખડી
(3) ઘરેણાં
(4) સંગણક
(5) ગણપતિ
(6) સંખ્યા
(7) પર્વ
(8) મુખ્ય
(9) શક્તિમાન
(10) કન્યાકુમારી

ઉત્તર :

(1) હાટ = 81

- હનો અંક 8 છે.
- ટનો અંક 1 છે.

(2) સુખડી = 725

- સનો અંક 7 છે.
- ખનો અંક 2 છે.
- ડનો અંક 5 છે.

(3) ઘરેણાં = 425

- ઘનો અંક 4 છે.
- રનો અંક 2 છે.
- ણનો અંક 5 છે.

(4) સંગણક = 7351

- સનો અંક 7 છે.
- ગનો અંક 3 છે.
- ણનો અંક 5 છે.
- કનો અંક 1 છે.

(5) **ગણપતિ = 3516**

- ગનો અંક 3 છે.
- ણનો અંક 5 છે.
- પનો અંક 1 છે.
- તનો અંક 6 છે.

(6) **સંખ્યા = 71**

- સનો અંક 7 છે.
- યનો અંક 1 છે.

(7) **પર્વ = 14**

- પનો અંક 1 છે.
- વનો અંક 4 છે.

(8) **મુખ્ય = 51**

- મનો અંક 5 છે.
- યનો અંક 1 છે.

(9) **શક્તિમાન = 51650**

- શનો અંક 5 છે.
- કનો અંક 1 છે.
- તનો અંક 6 છે.
- મનો અંક 5 છે.
- નનો અંક 0 છે.

(10) **કન્યાકુમારી = 11152**

- કનો અંક 1 છે.
- યનો અંક 1 છે.
- કનો અંક 1 છે.
- મનો અંક 5 છે.
- રનો અંક 2 છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વાક્યોને સંખ્યામાં રૂપાંતરિત કરો.

(1) સત્યમેવ જયતે (2) વન્દે માતરમ્ (3) જય જય ગરવી ગુજરાત (4) જળ જ જીવન છે.

ઉત્તર :

(1) સત્યમેવ જયતે = 7154816

(2) વન્દે માતરમ્ = 485625

(3) જય જય ગરવી ગુજરાત = 81813243826

(4) જળ જ જીવન છે. = 8388407

મહાવરો : 1

1. નીચેના શબ્દોને સંખ્યામાં રૂપાંતરિત કરો :

(1) સીતા (2) રામ (3) માધુરી (4) મહાદેવ (5) હરગોવિંદ

2. નીચેના વાક્યોને સંખ્યામાં રૂપાંતરિત કરો :

(1) પૂર્ણતા ગૌરવાય (2) પહેલું સુખ તે જાતે નર્યા

*

અંકનું અક્ષરમાં પરિવર્તન થાય તે અક્ષરને વૈદિક ગણિતમાં 'કૂટાંક' કહે છે. કોષ્ટક મુજબ 1, 2, 3, 4 અને 5 અંકો ચાર અક્ષરોનો નિર્દેશ કરે છે. 6, 7, 8 ત્રણ અક્ષરોનો નિર્દેશ કરે છે. 9 એ બે અક્ષરોનો અને 0 એ જ્ઞ, ક્ષ અને ન અક્ષરોનો સંકેત કરે છે.

માટે સંખ્યાનું શબ્દોમાં પરિવર્તન એ મૌલિક રચનાત્મક કાર્ય બને છે. એક સંખ્યા એકથી વધુ શબ્દોમાં પરિવર્તિત થઈ શકે છે. તેના એક કરતાં વધારે ઉત્તરો મળી શકે છે.

ઉદાહરણ 3 : સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને સંખ્યાઓને શબ્દો (કૂટાંક)માં રૂપાંતરિત કરો.

(1) 10 (2) 11 (3) 22 (4) 62 (5) 42 (6) 888

ઉત્તર :

(1) 10 = કક્ષ, પક્ષ, યજ્ઞ, યક્ષ
- 1 = ક, ટ, પ, ય
- 0 = જ્ઞ, ક્ષ, ન

(2) 11 = કાકા, કાક, કષ્ટ, ધ્યેય, પુણ્ય, પુષ્પ, કૂટ
- 1 = ક, ટ, પ, ય
- 1 = ક, ટ, પ, ય

(3) 22 = ખીર, રાષ્ટ્ર, રાખી, રાખ
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર

(4) 62 = ચંદ્ર, ચોર, ચીર, ચારો
- 6 = ચ, ત, ષ
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર

(5) 42 = ઘર, ભાર, વાર
- 4 = ઘ, ઢ, ભ, વ
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર

(6) 888 = જહાજ, દાહોદ, દહેજ
- 8 = જ, દ, હ
- 8 = જ, દ, હ
- 8 = જ, દ, હ

ઉદાહરણ 4 : સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને સંખ્યાઓને શબ્દો (કૂટાંક)માં રૂપાંતરિત કરો.

(1) 413 (2) 382 (3) 322 (4) 581 (5) 2333 (6) 5582

ઉત્તર :

(1) 413 = ભોપાલ, વિયોગ, વિપળ, ઘૂંટડો
- 4 = ઘ, ઢ, ભ, વ
- 1 = ક, ટ, પ, ય
- 3 = ગ, ડ, બ, લ, ળ

(2) 382 = બંજર, લુહાર, બજાર, લદ્દાખ

- 3 = ગ, ડ, બ, લ, ળ
- 8 = જ, દ, હ
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર

(3) 322 = બરફ, બફારો, ગોરખ

- 3 = ગ, ડ, બ, લ, ળ
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર

(4) 581 = મોહક, મોદક

- 5 = ઙ, ણ, મ, શ
- 8 = જ, દ, હ
- 1 = ક, ટ, પ, ય

(5) 2333 = રેલગાડી, ફૂલબાગ

- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર
- 3 = ગ, ડ, બ, લ, ળ
- 3 = ગ, ડ, બ, લ, ળ
- 3 = ગ, ડ, બ, લ, ળ

(6) 5082 = મનોહારી, શાનદાર, મનોહર

- 5 = ઙ, ણ, મ, શ
- 0 = ન, ક્ષ, જ્ઞ
- 8 = જ, દ, હ
- 2 = ખ, ઠ, ફ, ર

ઉદાહરણ 5 : ATM PIN ને શબ્દોમાં રૂપાંતરિત કરો.

(1) 2733 (2) 2442

ઉત્તર : (1) 2733 = રસગુલ્લા, રાસલીલા

(2) 2442 = રઘુવીર, રવિવાર

ઉદાહરણ 6 : આધાર કાર્ડ નંબરને વાક્યમાં રૂપાંતરિત કરો.

(1) 405135412639 (2) 419039905290

ઉત્તર : (1) વિનાશકાળમાં વિપરીત બુદ્ધિ

(2) વિદ્યા ધન બધા ધનમાં પ્રધાન

ઉદાહરણ 7 : મોબાઈલ નંબરને વાક્યમાં રૂપાંતરિત કરો.

(1) 7665125727 (2) 1749653449

ઉત્તર : (1) સંતોષમાં પરમ સુખ છે.

(2) પૈસા વધે તેમ લોભ વધે.

મહાવરો : 2

1. **નીચે આપેલ સંખ્યાઓને શબ્દો (કૂટાંક)માં રૂપાંતરિત કરો :**

(1) 71 (2) 83 (3) 41 (4) 51

2. **ATM PIN નંબરને શબ્દોમાં રૂપાંતરિત કરો :**

(1) 8256 (2) 5616 (3) 1529 (4) 4346

3. **આધાર કાર્ડ નંબરને વાક્યમાં રૂપાંતરિત કરો :**

(1) 130374330134 (2) 438411318431

4. **મોબાઈલ નંબરને વાક્યમાં રૂપાંતરિત કરો :**

(1) 2522601562 (2) 1301587055

ઉત્તર

મહાવરો : 1

1. (1) 76 (2) 25 (3) 592 (4) 5884 (5) 82348

2. (1) 1563241 (2) 1837268601

મહાવરો : 2

1. (1) છાંટ, છાપ, થાક, થાપ, છાંય (2) દાબ, દાલ, હાલ, જાગ

(3) ઘાટ, ભય, ભાટ, વાંક (4) માપ, શાપ, શાક, માયા

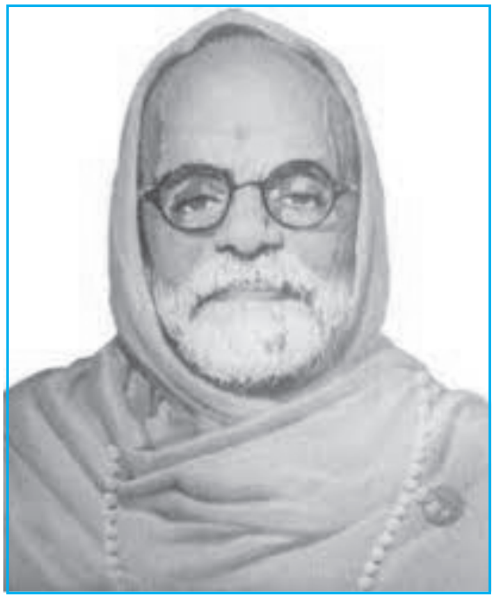
2. (1) હીરામોતી (2) માતાપિતા (3) કૃષ્ણરાધા (4) ભાગવત

(નોંધ : એક કરતાં વધારે ઉત્તર મળી શકે છે.)

3. (1) કાગનું બેસવું ડાળનું પડવું. (2) વડ જેવા ટેટા, બાપ જેવા બેટા.

4. (1) રામ રાખે તેને કોણ ચાખે. (2) કીડીને કણ, હાથીને મણ.

જગદ્ગુરુ સ્વામીશ્રી ભારતીકૃષ્ણતીર્થજીનો પરિચય



સ્વામીશ્રી ભારતીકૃષ્ણતીર્થજી શ્રી ગોવર્ધન મઠ, પુરીના જગદ્ગુરુ શંકરાચાર્ય હતા. તેઓ બહુઆયામી તેજસ્વી પ્રતિભા ધરાવતાં હતા. તેઓએ પ્રાચીન ઋષિ-મુનિઓના આદર્શો અને સિદ્ધાંતોને આગળ લઈ જવાનું પુણ્યશાળી ઋષિતુલ્ય કાર્ય કર્યું છે. ઉચ્ચકક્ષાની કઠિન એકાંત સાધનાની સિદ્ધ અવસ્થામાં તેમને વૈદિક ગણિતનાં સોળ સૂત્રો અને તેર ઉપસૂત્રોની અંતઃસ્ફુરણા થઈ હતી. આ સૂત્રોના અર્થઘટન અને ગણન પદ્ધતિઓ દ્વારા તેઓએ 'વૈદિક ગણિત'ની રચના કરી છે.

પૂજ્ય સ્વામીજી સંસ્કૃત ભાષાના પ્રખર પંડિત તો હતા જ ઉપરાંત સંસ્કૃત ભાષામાં રહેલા અનેક વિષયોમાં પણ પારંગત હતા. સંસ્કૃત અને ગણિત સિવાય દર્શનશાસ્ત્ર, સાહિત્ય, ઈતિહાસ, સમાજશાસ્ત્ર, રાજનીતિ વગેરે વિષયોમાં પણ તેઓએ પોતાની વિદ્વતા સિદ્ધ કરી હતી. તેઓ પ્રાચીન ગણિત અને વેદોમાં રહેલા વિજ્ઞાનનું જ્ઞાન પણ ધરાવતાં હતા અને આધુનિક ગણિત તથા વિજ્ઞાનની નવીન શોધોના અભ્યાસમાં પણ વિશેષ રુચિ ધરાવતાં હતા. અંગ્રેજી ભાષા પર પણ તેઓનું પ્રભુત્વ હતું.

પૂજ્ય સ્વામીજી પ્રખર પંડિત, મહાન યોગી અને ઉચ્ચ કોટિના સાધક સાથે પવિત્ર સંન્યાસી પણ હતા. તેઓનું વ્યક્તિત્વ નમ્ર અને વિવેકી હતું. તેમનું સાદગીપૂર્ણ જીવન પણ ભવ્ય અને દિવ્ય હતું. જે તેઓને પ્રાચીન ઋષિ-મુનિઓની શ્રેણીમાં મૂકે છે.

પૂજ્ય ભારતીકૃષ્ણતીર્થજીનો જન્મ 14 માર્ચ, ઈ.સ. 1884માં તમિલનાડુ રાજ્યમાં થયો હતો. તેમનું બાળપણનું નામ વ્યંકટરમણ હતું. તેઓ બાળપણથી જ અસાધારણ કુશાગ્ર બુદ્ધિ અને તીવ્ર યાદશક્તિ ધરાવતાં હતા. મદ્રાસ વિશ્વવિદ્યાલયની મૅટ્રિક પરીક્ષામાં તેઓ સર્વોચ્ચ ગુણ સાથે ઉત્તીર્ણ થયા હતા.

માત્ર પંદર વર્ષની ઉંમરે સંસ્કૃતના જ્ઞાન અને વકતૃત્વ કલામાં નિપુણતાને કારણે મદ્રાસ સંસ્કૃત ઍસોસિએશને તેઓને 'સરસ્વતી'ની ઉપાધિથી સન્માનિત કર્યા હતા. વીસ વર્ષની વયે એકસાથે સાત વિષયમાં એમ.એ.ની પરીક્ષા તેઓએ ઉત્તીર્ણ કરીને તેમના મેધાવી વ્યક્તિત્વનો પરિચય આપ્યો હતો.

શ્રી વ્યંકટરમણે ત્રણ વર્ષ સુધી રાષ્ટ્રીય મહાવિદ્યાલયમાં પ્રધાનાચાર્ય પદે રહીને ફરજ નિભાવી હતી. ત્યાર બાદ શ્રૃંગેરી મઠ, મૈસૂરમાં રહીને બ્રહ્મસાધના કરી વિવિધ શાસ્ત્રોનો અભ્યાસ કર્યો અને મઠની નજીકના વનોમાં આઠ વર્ષ સુધી તપસ્યા કરીને વૈદિક ગણિતની રચના કરી.

ઈ.સ. 1919માં તેઓએ દીક્ષા લીધી અને સંન્યાસી જીવન શરૂ કર્યું. તેમનું નામ શ્રી ભારતીકૃષ્ણતીર્થજી રાખવામાં આવ્યું. થોડાં વર્ષોના સન્યસ્ત જીવન બાદ પહેલાં તેઓ શારદાપીઠના અને પછી ગોવર્ધન મઠ, પુરીના

જગદ્‌ગુરુ શંકરાચાર્ય બન્યા અને જીવનનાં શેષ વર્ષો આધ્યાત્મિકતા, શિક્ષણ, નૈતિક મૂલ્યોની પુનઃસ્થાપનાના પ્રચાર તેમજ લેખન, પ્રવચન અને ભ્રમણ કરવામાં સમર્પિત કર્યાં.

પૂજ્ય સ્વામીજીએ નાગપુરમાં શ્રી વિશ્વપુનઃનિર્માણ સંઘની સ્થાપના કરી હતી. તેમાં તેમના શિષ્યો ઉપરાંત ઉચ્ચ ન્યાયાલયના ન્યાયાધીશો, શિક્ષણવિદો, રાજનીતિજ્ઞો અને અનેક સામાજિક અગ્રણીઓ સેવારત હતા.

ભારતીય જ્ઞાનપરંપરા અને ધરોહરના પ્રચાર-પ્રસાર અંગે તેઓએ અમેરિકા અને ઇંગ્લૅન્ડ દેશોમાં પ્રવાસ કરીને વૈદિક ગણિત તેમજ અન્ય શાસ્ત્રોનું શિક્ષણ અને પ્રવચનો આપ્યા. તેમના જ્ઞાનથી વિદેશી ગણિતજ્ઞો અને શિક્ષણવિદો મંત્રમુગ્ધ તેમજ ખૂબ જ અભિભૂત થયા હતા.

પૂજ્ય સ્વામીજીના પરમ શિષ્યા શ્રીમતી મંજુલા ત્રિવેદીના જણાવ્યા મુજબ વૈદિક ગણિતનાં સોળ સૂત્રો પર સ્વતંત્ર સોળ ગ્રંથો તેઓએ લખ્યા હતા, પરંતુ કોઈ કારણવશ તે નષ્ટ થઈ ગયા. તેઓ તેને ફરીથી લખવાના હતા, પરંતુ તેમની નાદુરસ્ત તબિયતને કારણે તે શક્ય ન બન્યું. 2 ફેબ્રુઆરી, 1960ના રોજ ગંભીર બીમારીને કારણે પૂજ્ય સ્વામીજીનું અવસાન થયું અને તેઓ પરમતત્ત્વમાં લીન થયા.

પરિશિષ્ટ

(માત્ર જાણકારી માટે)

વૈદિક ગણિતનાં સૂત્રો, ઉપસૂત્રો, તેના અર્થ અને ઉપયોગિતા

ક્રમ	સૂત્ર	અર્થ	ઉપયોગિતા
1.	एकाधिकेन पूर्वेण	પહેલા કરતાં એક વધારે દ્વારા	સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, વર્ગ, વિભાજ્યતા, દશાંશ અભિવ્યક્તિ, સંકલન વગેરેમાં.
2.	निखिलं नवतश्चरमं दशतः	અંતિમ દસમાંથી અને બાકીના નવમાંથી	પૂરક સંખ્યા મેળવવામાં, સંખ્યાઓના ગુણાકાર, ભાગાકાર, વર્ગ વિભાજ્યતા વગેરેમાં.
3.	ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्	ઊભા અને ત્રાંસા દ્વારા	સંખ્યાઓના ગુણાકાર, ભાગાકાર, વર્ગ, બહુપદીના ગુણાકાર, સરળ રેખાઓના સમીકરણ, વગેરેમાં.
4.	परावर्त्य योजयेत्	પક્ષાંતર કરીને ઉપયોગ કરો.	સંખ્યાઓના ભાગાકારમાં, બહુપદીના અવયવમાં, બહુપદીના ભાગાકારમાં, વિવિધ સમીકરણના ઉકેલ મેળવવામાં.
5.	शून्यं साम्यसमुच्चये	જ્યારે સમૂહ સમાન છે ત્યારે તે સમૂહનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય છે.	વિવિધ સમીકરણના ઉકેલમાં
6.	(आनुरुप्ये) शून्यमन्यत्	એક ગુણોત્તરમાં (અનુરૂપતા) હોય ત્યારે બીજો શૂન્ય હોય છે.	સમીકરણના ઉકેલમાં
7.	संकलनव्यवकलनाभ्याम्	સરવાળો અને બાદબાકી કરીને	સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવામાં સમીકરણના ઉકેલમાં
8.	पूरणापूरणाभ्याम्	પૂર્ણ અને અપૂર્ણ દ્વારા	સમીકરણના ઉકેલમાં
9.	चलनकलनाभ्याम्	ચલન અને કલન દ્વારા	બહુપદીના અવયવીકરણમાં કલનગણિતમાં
10.	यावदूनम्	જેટલું ઓછું	સંખ્યાઓનો ગુણાકાર, સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવામાં
11.	व्यष्टिसमष्टिः	એક અને સમુદાય	વિશિષ્ટ ચતુર્ઘાતી સમીકરણના ઉકેલમાં

ક્રમ	સૂત્ર	અર્થ	ઉપયોગિતા
12.	शेषाण्यङ्केन चरमेण	શેષને અંતિમ અંક દ્વારા	અપૂર્ણાંકની દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં
13.	सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्	અંતિમ તથા ઉપઅંતિમના બમણા	સમીકરણના ઉકેલમાં
14.	एकन्यूनेन पूर्वेण	પહેલા કરતાં એક ઓછા દ્વારા	વિશિષ્ટ સંખ્યાઓના ગુણાકારમાં
15.	गुणितसमुच्चयः	ગુણિતોનો સમૂહ	સમીકરણના ઉકેલ મેળવવામાં, અવયવીકરણની ચકાસણી કરવામાં.
16.	गुणकसमुच्चयः	ગુણકોનો સમૂહ	સમીકરણના ઉકેલ મેળવવામાં, અવયવીકરણની ચકાસણી કરવામાં.

ક્રમ	ઉપસૂત્ર	અર્થ	ઉપયોગિતા
1.	आनुरूप्येण	અનુરૂપતા (પ્રમાણ) દ્વારા	બહુપદીના અવયવીકરણમાં સંખ્યાઓના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધવામાં
2.	शिष्यते शेषसंज्ञः	બચેલાને શેષ કહે છે.	બહુપદીના ભાગાકાર કરવામાં
3.	आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन	પ્રથમને પ્રથમ દ્વારા અને અંતિમને અંતિમ દ્વારા	બહુપદીના અવયવીકરણમાં
4.	कैवलैः सप्तकं गुण्यात्	સાત માટે ગુણક કૈવલૈઃ (143) છે.	સાંકેતિક ભાષા (કૂટ સંખ્યા)માં
5.	वेष्टनम्	આશ્લેષણ	વિભાજ્યતાની ચકાસણીમાં
6.	यावदूनं तावदूनम्	જેટલું ઓછું છે તેટલું ઓછું	સંખ્યાઓનો ગુણાકાર, સંખ્યાઓના વર્ગ કરવામાં
7.	यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत	જેટલું ઓછું છે તેટલું ઓછું કરીને વર્ગ કરો.	સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવામાં
8.	अन्त्ययोर्दशकेऽपि	અંતિમ અંકોનો સરવાળો દસ થાય ત્યારે પણ	સંખ્યાઓનો ગુણાકાર, સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવામાં
9.	अन्त्ययोरेव	માત્ર અંતિમ બે અંકોનું	સમીકરણના ઉકેલ મેળવવામાં
10.	समुच्चयगुणितः	સમૂહ ગુણન	અવયવીકરણ અને તેની ચકાસણીમાં

ક્રમ	ઉપસૂત્ર	અર્થ	ઉપયોગિતા
11.	लोपनस्थापनाभ्याम्	લોપન તથા સ્થાપના દ્વારા	સમીકરણના ઉકેલમાં, બહુપદીના અવયવીકરણમાં, બહુપદીના ગુ.સા.અ.માં
12.	विलोकनम्	અવલોકન દ્વારા	અવયવીકરણમાં, સમીકરણના ઉકેલમાં, વર્ગમૂળ, ઘનમૂળ શોધવામાં
13.	गुणितसमुच्चयः समुच्चयगुणितः	અવયવોના ગુણાંકોના સરવાળાનું ગણનફળ એ ગુણનફળના ગુણાંકોના સરવાળા બરાબર થાય છે.	બહુપદીના અવયવોની ચકાસણીમાં

નોંધ